Wittgenstein's Writings

Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik II

Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik – II

Ludwig Wittgenstein

Ms-117 97[3] & 98[1]

1 —

Ansätze

In wiefern beweist die Diagonalmethode, daß es eine Zahl gibt die – sagen wir – keine Quadratwurzel ist? –

Es ist natürlich äußerst leicht zu zeigen 'daß es Zahlen gibt die keine Quadratwurzeln sind' – aber wie zeigt es *diese* Methode?

[*Ansätze*]

Haben wir denn einen allgemeinen Begriff davon, was es heißt: zeigen daß es eine Zahl gibt die keine dieser unendlichen Menge ist? Denken wir, jemand hätte diese Aufgabe erhalten eine Zahl zu nennen die von allen $^2\sqrt{n}$ verschieden ist; er hätte aber vom Diagonalverfahren nichts gewußt & hätte die Zahl $\sqrt[3]{2}$ als Lösung genannt; & gezeigt daß sie keine $^2\sqrt{n}$ ist. – Oder er hätte gesagt: nimm die $\sqrt{2} = 1\cdot4142 \ldots$ & subtrahiere 1 von der ersten Dezimale, im übrigen aber sollen die Stellen mit $\sqrt{2}$ übereinstimmen $1\cdot3142 \ldots$ kann keine $\sqrt{n}$ sein.

Ms-117 98[2]

2 "Nenne mir eine Zahl die mit $\sqrt{2}$ an jeder zweiten Dezimalstelle übereinstimmt!" Was fordert diese Aufgabe? – Die Frage ist: ist sie befriedigt durch die Antwort: Es ist die Zahl die man nach der Regel erhält: entwickle $\sqrt{2}$ & addiere 1 oder − 1 zu jeder zweiten Dezimalstelle? Es ist ebenso wie die Aufgabe: Teile einen Winkel in 3 Teile dadurch als gelöst betrachtet werden kann, daß man 3 gleiche Winkel an einander legt.

Ms-117

3 [*Ansätze*]

99[1] Wenn einem auf die Aufforderung: “Zeige mir eine Zahl die von allen diesen verschieden ist”, die Diagonalregel zur Antwort gegeben wird, warum soll er nicht sagen: “Aber so hab ich’s ja nicht gemeint!”? Was Du mir gegeben hast ist eine Regel Zahlen sukzessive herzustellen, die von jeder von diesen nach der Reihe verschieden sind. “Aber warum willst Du das nicht auch eine Methode nennen, eine Zahl zu kalkulieren?” – Aber was ist hier die Methode des Kalkulierens & was das Kalkulierte? Du wirst sagen sie seien *eins*, denn man kann nun z.B. sagen: die Zahl D ist größer als … & kleiner als …; man kann sie quadrieren etc. etc.. Ist die Frage nicht eigentlich: Wozu kann man diese Zahl *brauchen*. Ja, das klingt sonderbar. – Aber es heißt eben in welcher mathematischen Umgebung steht sie.

Ms-117 99[3] & 100[1]

4 [*Ansätze*]

Ich vergleiche also Methoden des Kalkulierens. – Aber da gibt es ja sehr verschiedene Methoden des Vergleichens. Ich soll aber in irgend einem Sinne die *Resultate* der Methoden mit einander vergleichen. Aber da wird schon alles unklar, denn in *einem* Sinne haben sie nicht jede *ein* Resultat, oder es ist nicht von vornherein klar was hier in jedem Falle als *das* Resultat zu betrachten ist. Ich will sagen es ist hier jede Gelegenheit gegeben die Bedeutungen zu drehen & zu wenden. –

Ms-117 100[2]

5 Sagen wir einmal – nicht: “Die Methode gibt ein Resultat”, sondern: “sie gibt eine unendliche Reihe von Resultaten”. Wie vergleiche ich unendliche Reihen von Resultaten? Ja, da gibt es sehr Verschiedenes, was ich so nennen kann.

Ms-117 100[3]

6 Es heißt hier immer: Blicke *weiter* um Dich!

Ms-117 100[4] & 101[1]

7 [*Ansätze*]

Das Resultat einer Kalkulation in der Wortsprache ausgedrückt ist mit Mißtrauen zu betrachten. Die *Rechnung* beleuchtet die Bedeutung des Wortausdrucks. Sie ist das *feinere* Instrument zur Bestimmung der Bedeutung. Willst Du wissen was der Wortausdruck bedeutet, so schau auf die Rechnung; nicht umgekehrt. Der Wortausdruck wirft nur einen matten allgemeinen Schein auf die Rechnung; die Rechnung aber ein grelles Licht auf den Wortausdruck. (Als wolltest Du die Höhen zweier Berge nicht durch Höhenmessung vergleichen sondern durch ihr scheinbares Verhältnis wenn man sie von unten anschaut.)

Ms-117 101[2]

8 'Ich will Dich eine Methode lehren wie Du in einer Entwicklung allen diesen Entwicklungen nach der Reihe *ausweichen* kannst.' So eine Methode ist das Diagonalverfahren. – "Also erzeugt sie eine Reihe, die von allen diesen verschieden ist." Ist das richtig? – Ja; wenn Du nämlich diese Worte auf diesen, oben beschriebenen Fall anwenden willst.

Ms-117 101[3] & 102[1]

9 [*Ansätze*]

Wie wäre es mit dieser Konstruktionsmethode: Die Diagonalzahl wird durch Addition oder Subtraktion von 1 erzeugt, aber ob zu addieren oder zu subtrahieren ist erfährt man erst, wenn man die ursprüngliche Reihe um mehrere Stellen fortgesetzt hat. Wie wenn man nun sagte: die Entwicklung der Diagonalreihe holt die Entwicklung der andern Reihen nie ein; – gewiß die Diagonalreihe weicht jeder der Reihen aus wenn sie sie trifft, aber das nützt ihr nichts da die Entwicklung der andern Reihen ihr wieder voraus ist. Ich kann hier doch sagen: es gibt *immer* eine der Reihen für die nicht bestimmt ist ob sie von der Diagonalreihe verschieden ist oder nicht. Man kann sagen: sie laufen einander ins Unendliche nach aber immer die ursprüngliche Reihe voran. “Aber Deine Regel reicht doch schon in’s Unendliche, also weißt Du doch schon genau daß die Diagonal-Reihe von jeder andern verschieden sein wird!”– – –

Ms-117 102[2] & 103[1]

10 [*Ansätze*]

Es heißt nichts zu sagen: “*Also* sind die X-Zahlen nicht abzählbar”. Man könnte etwa sagen: Den Zahlbegriff X nenne ich unabzählbar, wenn festgesetzt ist, daß, welche der unter ihn fallenden Zahlen immer Du in eine Reihe bringst die Diagonalzahl dieser Reihe auch unter ihn fällt.

Ms-117 103[2] & 103[3] & 104[1]

11 [*Ansätze*]

Da meine Zeichnung ja doch nur die *Andeutung* der Unendlichkeit ist, warum muß ich so zeichnen:

& nicht so:

Hier haben wir eben verschiedene Bilder; & ihnen entsprechen verschiedene Redeweisen. Aber kommt denn dabei etwas Nützliches heraus, wenn wir über *ihre* Berechtigung streiten? Das Wichtige muß doch woanders liegen; wenn auch diese Bilder unsre *Phantasie* am stärksten erhitzen.

Ms-117 104[2] **12** Wozu läßt sich der Begriff ‘unabzählbar’ verwenden?

Ms-117 104[3] **13** Man könnte doch sagen– wenn Einer tagaus tagein versuchte ‘alle Irrationalzahlen in eine Reihe zu bringen’: “Laß das! es heißt nichts; siehst Du nicht: wenn Du eine Reihe aufgestellt hättest, so käme ich Dir mit der Diagonalreihe!” Das könnte ihn von seiner Beschäftigung abbringen. Nun, das wäre ein Nutzen. Und mir kommt vor das wäre auch der ganze & eigentliche Zweck dieser Methode. Sie bedient sich des vagen Begriffes dieses Menschen, der gleichsam idiotisch drauflos arbeitet & bringt ihn durch ein Bild zur Ruhe. (Man könnte ihn aber durch ein andres Bild auch wieder zur Weiterführung seines Unternehmens bringen.)

Ms-117 105[1] **14** Die Methode führt etwas vor, – was man auf sehr vage Weise die Demonstration davon nennen kann, daß sich *diese* Rechnungsmethoden nicht in eine Reihe ordnen lassen. Und die Bedeutung des “*diese*” ist hier eben vag gehalten.

Ms-117 105[2] **15** Ein gescheiter Mann hat sich in diesem Sprachnetz gefangen: Also muß es ein interessantes Sprachnetz sein.

Ms-117 105[3] & 106[1] & 107[1]

16 Der Fehler beginnt damit daß man sagt die Kardinalzahlen ließen sich in eine Reihe ordnen. Welchen Begriff hat man denn von diesem Ordnen? Ja man hat natürlich einen von einer endlichen Reihe, aber das gibt uns ja hier höchstens eine vage Idee einen Leitstern für die Bildung eines Begriffs.) Der Begriff selbst ist ja von dieser & einigen andern Reihen *abstrahiert*; oder: der Ausdruck bezeichnet eine gewisse Analogie von Fällen & man kann ihn etwa dazu benützen um ein Gebiet, von dem man reden will vorläufig abzugrenzen. Damit ist aber nicht gesagt, daß die Frage einen klaren Sinn hat: "Ist die Menge R. in eine Reihe zu ordnen?" Denn diese Frage bedeutet nun etwa: Kann man mit diesen Gebilden etwas tun was dem Ordnen der Kardinalzahlen in eine Reihe entspricht. Wenn man also fragt: "Kann man die Reellen Zahlen in eine Reihe ordnen?" So könnte die gewissenhafte Antwort sein: "Ich kann mir vorläufig gar nichts Genaues darunter vorstellen". – "Aber Du kannst doch z.B. die Wurzeln & die algebraischen Zahlen in eine Reihe ordnen; also verstehst Du doch den Ausdruck!" – Richtiger gesagt ich *habe* hier gewisse analoge Gebilde, die ich mit dem gemeinsamen Namen "Reihen" benenne. Aber ich habe noch keine sichere Brücke von diesen Fällen zu dem 'aller reellen Zahlen'. Ich habe auch keine allgemeine Methode um zu versuchen ob sich die oder die Menge 'in eine Reihe ordnen läßt'. Nun zeigt man mir das Diagonalverfahren & sagt: "hier hast Du nun den Beweis, daß dieses Ordnen hier nicht geht". Aber ich kann antworten: "Ich weiß – wie gesagt – nicht, was es ist, was hier *nicht geht*." Wohl aber sehe ich: Du willst einen Unterschied zeigen in der Verwendung von "Wurzel", "algebraische Zahl", etc. einerseits

& “reelle Zahl” anderseits. Und zwar etwa so: Die Wurzeln nennen wir “reelle Zahlen” & die Diagonalzahl, die aus den Wurzeln gebildet ist *auch*. Und ähnlich mit allen Reihen reeller Zahlen. Daher hat es keinen Sinn von einer “Reihe *aller* reellen Zahlen” zu reden, weil man ja auch die Diagonalzahl der Reihe eine “reelle Zahl” nennt. – Wäre das nicht etwas ähnlich, wie wenn man gewöhnlich jede Reihe von Büchern selbst ein Buch nennte & nun sagte: “Es hat keinen Sinn von ‘der Reihe aller Bücher’ zu reden, da jede Reihe selbst ein Buch ist.”

Ms-117 107[2] & 108[1]

17 Es ist hier sehr nützlich sich vorzustellen, daß das Diagonalverfahren zur Erzeugung einer reellen Zahl längst vor der Erfindung der Mengenlehre bekannt & auch den Schulkindern geläufig gewesen wäre, wie es ja sehr wohl hätte sein können. So wird nämlich der Aspekt der Entdeckung Cantors geändert. Diese Entdeckung hätte sehr wohl *bloß* in der Interpretation dieser altbekannten, elementaren Rechnung liegen können.

Ms-117 108[2]

18 Die Rechnung selbst ist ja nützlich. Die Aufgabe wäre etwa: Schreibe eine Dezimalzahl an die verschieden ist von den Zahlen:

$$0\cdot 1246798\quad 0\cdot 3469876\quad 0\cdot 0127649\quad 0\cdot 3426794 \cdots \cdots\cdot\cdot$$

Man denke sich eine lange Reihe.

Das Kind denkt sich: Wie soll ich das machen ich müßte ja auf alle die Zahlen zugleich schauen um zu vermeiden daß ich nicht doch eine von ihnen anschreibe. Die Methode sagt nun:

durchaus nicht; ändere die erste Stelle der ersten Zahl, die zweite der zweiten, etc. etc. & Du bist sicher eine Zahl hingeschrieben zu haben, die mit keiner der gegebenen übereinstimmt. Die Zahl die man so erhält könnte immer die Diagonalzahl genannt werden.

Ms-117 108[3] & 109[1]

19 Das Gefährliche, Täuschende, der Fassung "Man kann die reellen Zahlen nicht in eine Reihe ordnen" oder gar "Die Menge … ist nicht abzählbar" liegt darin, daß sie das was eine Begriffsbestimmung Begriffsbildung ist als eine Naturtatsache erscheinen lassen.

Ms-117 109[2]

20 Bescheiden heißt der Satz: "Wenn man etwas eine Reihe reeller Zahlen nennt, so heißt die Entwicklung des Diagonalverfahrens auch eine 'reelle Zahl' & zwar eine die 'von allen Gliedern der Reihe verschieden' sei.

Ms-117 109[3]

21 Unser Verdacht sollte immer rege sein, wenn ein Beweis mehr beweist, als seine Mittel ihm erlauben. Man könnte so etwas einen 'prahlerischen Beweis' nennen.

Ms-117 109[4] & 110[1]

22 Der gebräuchliche Ausdruck fingiert einen Vorgang eine Methode des Ordnens die hier zwar anwendbar ist aber nicht zum Ziele führt wegen der Zahl der Gegenstände die größer ist als selbst die der Kardinalzahlen. Wenn gesagt würde: “Die Überlegung über das Diagonalverfahren zeigt Euch, daß der *Begriff* ‘reelle Zahl’ viel weniger Analogie mit dem Begriff Kardinalzahl hat, als man, durch gewisse Analogien verführt, zu glauben geneigt ist” so hätte das einen guten & ehrlichen Sinn. Es geschieht aber gerade das *Gegenteil*: indem die ‘Menge’ der reellen Zahlen angeblich der Größe nach mit der der Kardinalzahlen verglichen wird. Die Artverschiedenheit der beiden Konzeptionen wird durch eine schiefe Ausdrucksweise als Verschiedenheit der Ausdehnung dargestellt. Ich glaube & hoffe eine künftige Generation wird über diesen Hokus Pokus lachen.

Ms-121 27r[4] & 27v[1]

23 30.05.1938

Die Krankheit einer Zeit heilt sich durch eine Veränderung in der Lebensweise der Menschen & die Krankheit der philosophischen Probleme konnte nur durch eine veränderte Denkweise & Lebensweise geheilt werden nicht durch eine Medizin die ein Einzelner erfand. Denke, daß der Gebrauch des Wagens gewisse Krankheiten hervorruft oder begünstigt & die Menschheit von dieser Krankheit geplagt wird, bis sie sich, aus irgendwelchen Ursachen, als Resultat irgendeiner Entwickelung, das Fahren wieder abgewöhnt.

Ms-121 28v[2]

24 31.05.1938

Wie macht man denn von dem Satz Verwendung: “Es gibt keine größte Kardinalzahl”? Wann, & bei welcher Gelegenheit, würde man ihn sagen? Diese Verwendung ist jedenfalls eine ganz andere, als die des mathematischen Satzes “25 × 25 = 625”.

Ms-121 28v[3] & 29r[1]

25 Vor allem ist zu bemerken, daß wir dies überhaupt fragen, was darauf deutet, daß die Antwort nicht (ganz) auf der Hand liegt. Und ferners, wenn man die Frage rasch beantworten will gleitet man leicht aus. Es ist hier ähnlich wie mit der Frage, welche Erfahrung uns zeigt, daß unser Raum dreidimensional ist.

Ms-121 29r[2]

26 Von einer *Erlaubnis* sagen wir, sie habe kein Ende.

Ms-121 29r[3]

27 Und man kann sagen, die Erlaubnis Sprachspiele mit Kardinalzahlen zu spielen habe kein Ende. Dies würde man etwa Einem sagen, dem wir unsere Sprache & Sprachspiele lehrten. Es wäre also wieder ein grammatischer Satz, aber von *ganz* anderer Art als “25 × 25 = 625”. Er wäre aber von großer Bedeutung, wenn der Schüler etwa geneigt wäre (vielleicht weil er einer ganz andern Kultur erzogen worden wäre) ein definitives Ende dieser Reihe von Sprachspielen zu erwarten.

Ms-121 35v[3]

28 10.06.1938

Warum sollen wir sagen: die Irrationalzahlen können nicht geordnet werden? – Wir haben eine Methode, jede Ordnung zu zerstören.

Ms-121 36r[2] & 36v[1]

29 Das Cantorsche Diagonalverfahren zeigt uns nicht eine Irrationalzahl die vor allen im System verschieden ist, aber es gibt dem mathematischen Satz Sinn die Zahl so & so sei von allen des Systems verschieden. Cantor könnte sagen: Du kannst *dadurch* beweisen, daß eine Zahl von allen des Systems verschieden ist, daß Du beweist, daß sie in der ersten Stelle von der ersten Zahl, in der zweiten Stelle von der zweiten Zahl u.s.f. verschieden ist. Cantor sagt etwas über die Multiplizität des Begriffs "Reelle Zahl, verschieden von allen eines Systems."

Ms-121 36v[2]

30 12.06.1938

Cantor zeigt, wenn wir ein System von Extensionen haben, daß es dann Sinn hat, von einer Extension zu reden, die von ihnen allen verschieden ist. – Aber damit ist die Grammatik des Wortes "Extension" noch nicht bestimmt.

Ms-121 36v[3] & 37r[1]

31 Cantor gibt dem Ausdruck "Extension die von allen Extensionen eines Systems verschieden ist" einen Sinn indem er sagt, eine Extension solle so genannt werden, wenn von ihr bewiesen werden kann, daß sie von den Extensionen eines Systems diagonal verschieden ist.

Ms-121 37r[2]

32 Es gibt also eine *Aufgabe*: Finde eine Zahl deren Entwicklung von denen dieses Systems diagonal verschieden ist.

Ms-121 38v[1]

33 13.06.1938

Man könnte sagen: Außer den rationalen Punkten befinden sich auf der Zahlenlinie *diverse Systeme* irrationaler Punkte. Es gibt kein System der Irrationalzahlen – aber auch kein Über-

System, keine ‘Menge der irrationalen Zahlen’ von einer Unendlichkeit höherer Ordnung.

Ms-121 38v[2] & 39r[1]

34 Cantor definiert eine *Verschiedenheit höherer Ordnung* nämlich eine ‘Verschiedenheit’ einer Entwicklung von einem *System* von Entwicklungen. Man kann diese Erklärung so benützen, daß man zeigt daß eine Zahl in diesem Sinne von einem System von Zahlen verschieden ist: sagen wir π von dem System der algebraischen Zahlen. Aber wir können nicht gut sagen, die Regel, die Stellen in der Diagonale so & so zu verändern, sei dadurch als von den Regeln des Systems verschieden bewiesen, weil diese Regel selbst ‘höherer Ordnung’ ist denn sie *handelt* von der Veränderung eines Systems von Regeln & daher aber ist es von vornherein nicht klar, in welchem Fall wir die Entwickelung *so einer* Regel von allen Entwicklungen des Systems verschieden erklären wollen.

Ms-121 41v[2] & 42r[1]

35 12.07.1938

‘*Diese Überlegungen können uns dahin führen, zu sagen*, daß $2\aleph_0>\aleph_0$’. D.h.: wir können die Überlegungen uns dahin führen *lassen*. Oder: Wir können *dies* sagen, & *dies* als Grund dafür angeben. Aber wenn wir es nun sagen – was ist weiter damit anzufangen? In welcher Praxis ist dieser Satz *verankert*?

Er ist vorläufig ein Stück mathematischen Gerüsts, das in der Luft hängt, so aussieht als wäre es, sagen wir, ein Architrav, aber von nichts getragen wird & nichts trägt.

Ms-121 42r[2] **36** Gewisse Überlegungen können uns dahin führen, zu sagen daß 10^{10} Seelen in einem cm^3 Platz haben. Warum sagen wir es aber trotzdem nicht? Weil es zu nichts nütze ist. Weil es zwar ein Bild heraufruft, aber eins, womit wir weiter nichts machen können.

Ms-121 42r[3] **37** Der Satz gilt soviel, als seine Gründe gelten. Er trägt soviel, wie seine Gründe tragen, die ihn stützen.

Ms-121 43r[1] & 43v[1] & 44r[1] & 44v[1]

38 Eine interessante Frage ist: Welchen Zusammenhang hat $\aleph_0$ mit den Kardinalzahlen, deren Zahl es sein soll? $\aleph_0$ wäre offenbar das _Prädikat “endlose Reihe_”, in seiner Anwendung auf die Reihe der Kardinalzahlen & ähnliche mathematische Bildungen. Es ist hier wichtig, das Verhältnis zwischen einer Reihe im nicht-mathematischen Sinn & einer im mathematischen Sinn zu erfassen. Es ist natürlich klar, daß wir in der Mathematik das Wort “Zahlenreihe” *nicht* im Sinne von “Reihe von Zahlzeichen” gebrauchen, wenn, natürlich, auch ein Zusammenhang zwischen dem Gebrauch des einen Ausdrucks & des andern besteht. Eine Eisenbahn ist nicht ein Eisenbahnzug; sie ist auch nicht etwas einem Eisenbahnzug ähnliches. Reihe im mathematischen Sinn ist eine Konstruktionsart für Reihen sprachlicher Ausdrücke. Wir haben also eine grammatische Klasse “endlose Folge” & äquivalent mit diesem Ausdruck ein Wort, dessen Grammatik (eine gewisse) Ähnlichkeit mit der eines Zahlworts hat: “endlos”, oder “א0”. Dies hängt damit zusammen, daß wir unter den Kalkülen der Mathematik eine Technik haben, die wir ‘mit einem gewissen Recht 1-1 Zuordnung der Glieder zweier endloser Folgen’ nennen können, weil sie mit einem solchen gegenseitigen Zuordnen der Glieder sogenannter ‘endlicher’ Klassen Ähnlichkeit hat. Daraus nun, daß wir (eine) Verwendung für eine *Art von* Zahlwort haben, welches, gleichsam, die Anzahl der Glieder einer endlosen Reihe bezeichnet, folgt nicht daß es auch irgendeinen Sinn hat von der Zahl des Begriffes “endlose Folge” zu reden, daß wir *hier* irgendwelche Verwendung für etwas Zahlwortähnliches haben. Es gibt eben keine grammatische Technik, die die Verwendung

so eines Wortes nahelegte. Denn ich kann freilich den Ausdruck bilden: “Klasse aller Klassen, die (mit) der Klasse ‘endlose Folge’ zahlengleich sind” (wie auch den: “Klasse aller Engel die auf einer Nadelspitze Platz haben”) aber dieser Ausdruck ist leer, solang es keine Verwendung für ihn gibt. Eine solche ist nicht: noch zu entdecken, sondern: erst zu *erfinden*

Ms-121 44v[2]

39 Denke, ich legte ein dem Schachbrett ähnliches Spielbrett vor Dich, setzte Schachfiguren ähnliche Figuren darauf, – erklärte: “Das ist der ‘*König*’, das sind die ‘*Ritter*’, das die ’*Bürger*. – Mehr wissen wir von dem Spiel noch nicht; aber das ist immerhin etwas. – Und mehr wird vielleicht noch entdeckt werden.”

Ms-121 60r[2] & 60v[1]

40 25.12.1938

“Man kann die Brüche nicht ihrer Größe nach ordnen. – Dies klingt vor allem sehr interessant & merkwürdig. Es klingt interessant in ganz anderem Sinne, als, etwa, ein Satz aus der Differentialrechnung. Der Unterschied liegt, glaube ich, darin, daß ein solcher sich leicht mit einer Anwendung auf Physikalisches assoziiert, während *jener* Satz ganz & gar der Mathematik anzugehören gleichsam die Physik der mathematischen Gegenstände selbst zu betreffen scheint. Man möchte von ihm etwa sagen: er führe uns in die Geheimnisse der mathematischen Welt ein. Es ist *dieser* Aspekt vor dem ich warnen will.

Ms-121 60v[2]

41 Wenn es den Anschein hat … (Littlewood), dann ist Vorsicht geboten.

Ms-121 61v[1] & 62r[1] & 62v[1] & 63r[1]

42 Wenn ich mir bei dem Satz, die Brüche können nicht ihrer Größe nach in eine Reihe geordnet werden, das Bild einer unendlichen Reihe von Dingen mache, & zwischen je zwei Nachbarbäumen neue Bäume in die Höhe schießen & nun wieder zwischen jedem Baum & seinem Nachbar neue Bäume & so fort ohne Ende, so haben wir hier (sicher) etwas, wovor einem schwindlig werden kann. Sehen wir aber, daß dieses Bild zwar sensationell, aber ganz unzutreffend ist, daß wir uns nicht von den Worten “Reihe”, “ordnen”, “existieren” & andern fangen lassen dürfen, so werden wir auf eine Darstellung des Sachverhalts zurückgehen, in der alles wieder trivial & gewöhnlich aussieht. so werden wir (wieder) auf die (Darstellung der) Technik des Bruchrechnens zurückgreifen an der nun nichts *Seltsames* mehr ist.

Ms-121 63r[2]

43 Daß wir eine Technik erfinden, in der der Ausdruck “der nächst größere Bruch” keinen Sinn hat, daß wir ihm keinen Sinn gegeben haben, ist nichts Erstaunliches.

Ms-121 63r[3]

44 Wenn wir eine Technik des fortgesetzten Interpolierens von Brüchen anwenden, so werden wir keinen Bruch den “nächst größeren” nennen wollen.

Ms-121 63r[4] & 63v[1]

45 Von einer Technik zu sagen, sie sei unbegrenzt, heißt *nicht*, sie laufe ohne aufzuhören weiter, *wachse* ins Ungemessene; sondern, es fehle ihr die Institution des Endes, sie sei nicht abgeschlossen. Wie man von einem Satz sagen könnte, es mangle ihm der Abschluß, wenn der Schlußpunkt fehlt oder von einem Spielfeld es sei nicht begrenzt , wenn ihm die Regeln des Spiels keine gezogene Grenze vorschreiben.

Ms-121 63v[2] & 64r[1]

46 Eine neue Rechentechnik soll uns ja eben ein *neues* Bild liefern, eine *neue Ausdrucksweise*; & wir können nichts Absurderes tun, als dieses neue Schema, diese neue Art von Gerüst, vermittels der alten Ausdrücke beschreiben zu wollen.

Ms-121 64r[2]

47 Was ist die Funktion eines solchen Satzes wie: "Es gibt zu einem Bruch nicht einen nächst größeren Bruch, aber zu einer Kardinalzahl eine nächst größere"? Es ist doch gleichsam ein Satz, der zwei Spiele vergleicht, [wie: im Damespiel gibt es ein Überspringen eines Steines, aber nicht im Schachspiel.]

Ms-121 64r[3]

48 Wir nennen etwas "die nächst größere Kardinalzahl konstruieren" aber nichts "den nächst größeren Bruch konstruieren".

Ms-121 64v[2]

49 Wie vergleicht man Spiele? Indem man sie beschreibt – indem man das eine als Variation des andern beschreibt – indem man sie beschreibt & die Unterschiede & Analogien *hervorhebt*.

Ms-121 64v[3] & 65r[1] & 65v[1]

50 "Im Damespiel gibt es keinen König" – was sagt das? (Es klingt kindisch.) Heißt es nur, daß man keinen Damestein "König" nennt; & wenn man nun einen so nennte, gäbe es im Damespiel einen König? Wie ist es aber mit *dem* Satz: "Im Damespiel sind alle Steine gleichberechtigt, aber nicht im Schach"? – Wem teile ich dies mit? Dem, der die beiden Spiele (schon) kennt, oder einem der sie noch nicht kennt. Da scheint es, daß der erste unserer Mitteilung nicht bedarf & der zweite nichts von ihr hat.. Aber wie wenn ich sagte: "Schau! im Damespiel sind alle Steine gleichberechtigt ..." oder noch besser: "Schau! in diesen Spielen sind alle Steine gleichberechtigt, in jenen nicht". Aber was tut so ein Satz? Er führt einen neuen *Begriff* ein, einen neuen Einteilungsgrund (Einteilungsprinzip). Ich lehre Dich, die Aufgabe beantworten: nenne mir Spiele der ersten Art! etc. Ähnlich aber könnte man Aufgaben stellen: "Erfinde ein Spiel, in dem es einen König gibt".

Ms-121 67r[3] & 67v[1]

51 'Wir können die Brüche nicht ihrer Größe nach in eine Reihe, aber wir *können* sie in eine unendliche Reihe ordnen.' Was hat der gelernt, der das nicht wußte? Er hat eine neue Art der Rechnung gelernt z.B.: "bestimme die Nummer des Bruches ...".

Ms-121 67v[2]

52 Er lernt diese Technik – aber lernt er nicht auch, daß es so eine Technik gibt? Ich habe allerdings in einem wichtigen Sinne gelernt, daß es so eine Technik gibt; ich habe nämlich eine Technik gelernt, die sich jetzt auf alles mögliche Andre anwenden läßt.

Ms-121 67v[3] & 68r[1]

53 27.12.1938

'Wie würdest Du nun *das* nennen?'

Nicht, "eine Methode die Zahlenpaare fortlaufend zu numerieren"? Und könnte ich nicht auch sagen: "die Zahlenpaare in eine Reihe zu ordnen"?

Ms-121 68r[2]

54 Lehrt mich nun die Mathematik, daß ich die Zahlenpaare in eine Reihe ordnen kann? Kann ich denn sagen: sie lehrt mich, daß ich *das* machen kann? Hat es denn Sinn zu sagen, ich lehre ein Kind, daß man multiplizieren kann – indem ich es lehre zu multiplizieren. Eher könnte man natürlich sagen, ich lehre ihm daß man Brüche multiplizieren kann, nachdem er Kardinalzahlen mit einander zu multiplizieren gelernt hat. Denn nun, könnte man sagen, weiß er schon was "multiplizieren" heißt. Aber wäre nicht auch das irreführend.

Ms-121 68v[1]

55 Wenn Einer sagt, ich habe den Satz bewiesen, daß man Zahlenpaare in eine Reihe ordnen könne; so ist zu antworten, daß dies ja kein mathematischer Satz ist, da man mit den Worten "Man", "kann", "die", "Zahlenpaare" etc. nicht rechnet. Der Satz "man kann die etc." ist vielmehr nur eine beiläufige Beschreibung der Technik die man lehrt, etwa ein nicht unpassender *Titel*, eine Überschrift zu diesem Kapitel. Aber ein Titel mit dem man (vorderhand) nicht *rechnen* kann.

Ms-121 68v[2] & 69r[1]

56 Aber, sagst Du, das ist es eben, was der logische Kalkül Freges & Russells tut: in ihm hat jedes Wort, was in der Mathematik gesprochen wird, exakte Bedeutung ist ein Element des Kalküls. In diesem Kalkül kann man also wirklich beweisen: "man kann multiplizieren". Wohl nun ist er ein mathematischer Satz; aber wer sagt, daß man mit diesem Satz etwas anfangen kann? Wer sagt, *wozu* er nütze ist? Denn, daß er interessant klingt, ist nicht genug! Weil wir im Unterricht vielleicht den Satz gebrauchen: "Du siehst also, man kann die Brüche in eine Reihe ordnen", sagt nicht daß wir für diesen Satz andere Verwendung haben, als die, ein einprägsames Bild mit dieser Rechnungsart zu verknüpfen.

Ms-121 69v[1]

Wenn hier das Interesse an dem Satz haftet der 'bewiesen wurde', so haftet es an einem Bild, das (eine) äußerst schwächliche Berechtigung hat, (uns) aber durch seine Seltsamkeit reizt, wie etwa das Bild von der 'Richtung' des Verlaufs der Zeit. Es bewirkt einen leisen leichten Taumel der Gedanken

Ms-121 69v[2]

57 Ich kann hier nur sagen: Trenne Dich so bald wie möglich von diesem Bild & sieh' das Interesse der Rechnung in ihrer Anwendung. (Es ist als wären wir auf einem Maskenball, auf dem jede Rechnung in seltsamer Verkleidung erscheint.)

Ms-121 87v[3] & 88r[1]

58 "Soll man das Wort 'unendlich' in der Mathematik vermeiden?" Ja; dort, wo es eine Bedeutung in den Kalkül mitzubringen scheint statt sie erst von ihm zu erhalten.

Ms-121 88r[2] & 88v[1]

59 Die Redeweise: “wenn man aber in den Kalkül sieht, ist gar nichts Unendliches da” – natürlich eine ungeschickte Redeweise – aber sie bedeutet: ist es hier wirklich nötig das Bild des Unendlichen (der ungeheuern Größe) hier heraufzubeschwören? & wie ist dieses Bild mit dem *Kalkül* in Verbindung? denn seine Verbindung ist nicht die des Bildes |||| mit 4.

Ms-121 88v[2] & 88v[3] & 88v[4] & 89r[1]

60 So zu tun, als sei man enttäuscht, nichts Unendliches im Kalkül gefunden zu haben ist (freilich) komisch; nicht aber, die Frage zu stellen: : welches ist denn die alltägliche Verwendung des Wortes “unendlich”, die ihm seine Bedeutung für uns gibt, & was ist nun seine Verbindung mit diesen mathematischen Kalkülen?

Ms-121 89r[2]

61 Finitism & Behaviourism sind ganz ähnliche Richtungen. Beide sagen: hier ist doch nur ... Beide leugnen die Existenz von etwas, beide zu dem Zweck, um (aus) einer Verwirrung zu entkommen.

Ms-121 89r[3] & 89v[1]

62 Was ich (hier) tue ist nicht Rechnungen als falsch zu erweisen; sondern das *Interesse* von Rechnungen einer Prüfung zu unterziehen. Ich prüfe etwa die Berechtigung, hier noch das Wort ... zu gebrauchen. Eigentlich aber: ich fordere immer wieder zu so einer Untersuchung auf. Zeige, daß es sie gibt, & was da etwa zu untersuchen ist. Ich darf also nicht sagen: “So darf man sich nicht ausdrücken”, oder “Das ist absurd”, oder “Das ist uninteressant”, sondern: “Prüfe diesen Ausdruck in dieser Weise auf seine Berechtigung”; denn man kennt seine Berechtigung, weil seine Verwendung, noch nicht, damit, daß man ...