

Wittgenstein's
Writings

**Bemerkungen
über
die
Grundlagen
der
Mathematik
VII**

**Bemerkungen
über die
Grundlagen der
Mathematik –
VII**

Ludwig
Wittgenstein

- Ms-124 **1** 08.06.1941
 7[3] &
 8[1] Die Rolle der Sätze, die von den Maßen handeln & nicht 'Erfahrungssätze' sind. – Jemand sagt mir: 'Diese Strecke ist 240 Zoll lang'. Ich sage: 'Das sind 20 Fuß, also ungefähr 7 Schritte & habe nun einen Begriff von der Länge erhalten. – Die Umformung beruht auf arithmetischen Sätzen & auf dem Satz, daß 12 Zoll = 1 Fuß ist.
- Ms-124 Diesen letzteren Satz wird niemand für gewöhnlich, als
 8[2] Erfahrungssatz aussprechen. Man sagt er drückt ein Übereinkommen aus. Aber das Messen würde seinen gegenwärtigen Charakter gänzlich ändern, wenn nicht, z.B., die Aneinanderreihung von 12 Zollstücken für gewöhnlich eine Länge ergäbe, die sich wieder besonders aufbewahren läßt.
- Ms-124 Muß ich darum sagen, der Satz "12 Zoll = 1 Fuß" sage alle
 8[3] diese Dinge aus, die dem Messen seine gegenwärtige Pointe geben?
- Ms-124 Nein. Der Satz *ruht* in einer Technik. Und, wenn Du willst, in
 9[1] den physikalischen und psychologischen Tatsachen, die diese Technik möglich machen. Aber darum ist sein Sinn nicht diese Bedingungen auszusprechen. Das Gegenteil jenes Satzes, '12 Zoll \neq 1 Fuß' sagt nicht, daß die Maßstäbe nicht starr genug sind, oder wir nicht Alle in gleicher Weise zählen & rechnen. Der Satz *ruht* in einer Technik, beschreibt sie aber nicht.
- Ms-124 **2** Der Satz spielt die typische (damit aber nicht *einfache*) Rolle
 9[2] der Regel.

- Ms-124 9[3] & 10[1] Ich kann mittels des Satzes 12 Zoll = 1 Fuß eine Voraussage machen; nämlich daß 12 zoll-lange Stücke Holz aneinander gelegt sich gleichlang mit einem auf andere Weise gemessenen Stück erweisen wird. Also ist der Witz jener Regel etwa, daß man mittels ihrer gewisse Voraussagen machen kann. Verliert sie nun dadurch den Charakter der *Regel*? –
- Ms-124 10[2] Warum kann man jene Voraussage machen? Nun, – alle Maßstäbe sind gleich gearbeitet; sie verändern ihre Längen nicht beträchtlich; Stücke Holz, die man auf einen Zoll oder Fuß zugeschnitten hat, tun dies auch nicht; unser Gedächtnis ist gut genug, damit wir beim Zählen bis '12' Ziffern nicht doppelt nehmen & nicht auslassen; u.a..
- Ms-124 10[3] & 11[1] Aber kann man denn nun nicht die Regel durch einen Erfahrungssatz ersetzen, der sagt, daß Maßstäbe so & so gearbeitet sind, daß Leute sie *so* handhaben? Man gäbe etwa eine ethnologische Beschreibung des Messens.
- Ms-124 11[2] Nun es ist offenbar, daß diese Darstellung die Funktion einer Regel übernehmen könnte.
- Ms-124 11[4] & 12[1] Wer einen math. Satz weiß, soll noch nichts wissen. Ist Verwirrung in unserm Rechnen, rechnet jeder anders & einmal so, einmal so, so liegt noch kein Rechnen vor; stimmen wir überein, nun dann haben wir nur unsre Uhren reguliert, doch noch keine Zeit gemessen. Wer einen math. Satz weiß, soll noch *nichts* wissen. D.h., der math. Satz soll nur das Gerüst liefern für eine Beschreibung.

- Ms-124 12[2] **3** Wie kann die bloße Umformung des Ausdrucks von praktischer Konsequenz sein?
- Ms-124 12[3] & 13[1] Daß ich 25×25 Nüsse habe, läßt sich verifizieren indem ich 625 Nüsse zähle, aber es läßt sich auch auf andre Weise herausfinden, die mit der Zahlangabe ' 25×25 ' näher verknüpft ist. Und es ist natürlich die Verknüpfung dieser beiden Arten der **Zahlbestimmung**, in der ein Zweck des Multiplizierens ruht.
- Ms-124 13[2] 09.06.1941
Die Regel ist, als Regel, losgelöst, & steht, sozusagen, selbstherrlich da; obschon, was ihr Wichtigkeit gibt, die Tatsachen der täglichen Erfahrung sind.
- Ms-124 13[3] & 14[1] Was ich zu tun habe, ist, sozusagen, das Amt eines Königs zu beschreiben: wobei ich nun nicht in den Fehler verfallen darf, sein Amt aus dessen Nützlichkeit zu erklären, noch die Nützlichkeit außer Acht zu lassen.
- Ms-124 14[2] Ich richte mich beim praktischen Arbeiten nach dem Resultat der Verwandlung des Ausdrucks.
- Ms-124 14[3] Wie kann ich dann aber noch sagen, daß es dasselbe heißt, ob ich sage "hier sind 625 Nüsse", oder "hier sind 25×25 Nüsse"?
- Ms-124 14[4] Wer den Satz "hier sind 625 ..." verifiziert, verifiziert dadurch auch "hier sind 25×25 ..."; u.u.. Doch steht die eine Form einer Art der Verifikation, die andre einer andern näher.

- Ms-124 14[5] & 15[1] Wie kannst Du sagen, daß "... 625 ..." & "...25 × 25 ..." dasselbe sagen? – Erst durch unsere Arithmetik *werden* sie *eins*.
- Ms-124 15[3] Ich kann einmal die eine, einmal die andere Art der Beschreibung, durch Zählen z.B., erhalten. D.h., ich kann jede der beiden Formen auf jede Art erhalten; aber auf verschiedenem Weg.
- Ms-124 15[4] & 16[1] Man könnte nun fragen: Wenn der Satz "...625 ..." einmal so, einmal anders verifiziert wurde, sagte er da beidemale dasselbe? Oder: Was geschieht, wenn eine Methode des Verifizierens '625', die andre nicht '25 × 25' ergibt? – Ist da "... 625 ..." wahr & " ...25 × 25 ..." falsch? Nein! – Das eine anzweifeln heißt, das andre anzweifeln: Das ist die Grammatik, die unsre Arithmetik diesen Zeichen gibt.
- Ms-124 16[2] Wenn die beiden Arten des Zählens als Begründung einer *Zahlangabe* gebraucht werden, dann ist nur *eine* Zahlangabe, wenn auch in verschiedenen Formen, vorgesehen. Dagegen kann man ohne Widerspruch sagen: "Mir kommt bei der einen Art des Zählens 25 × 25 [& also 625] heraus, bei der anderen nicht 625 [also nicht 25 × 25]". (Die Arithmetik hat hiergegen keinen Einwand.)
- Ms-124 16[3] & 17[1] Daß die Arithmetik die beiden Ausdrücke einander gleichsetzt, ist, könnte man sagen, ein grammatischer Trick. Sie sperrt damit eine bestimmte Art der Beschreibung ab & leitet sie in andere Kanäle. (Und daß dies mit den Tatsachen der Erfahrung zusammenhängt braucht nicht erst gesagt zu werden.)

Ms-124 17[2] & 18[1] **4** Nimm an, ich habe jemand multiplizieren gelehrt, aber nicht mit Hilfe einer ausgesprochenen allgemeinen Regel, sondern nur dadurch daß er sieht wie ich ihm Beispiele vorrechne. Ich kann ihm dann eine *neue* Aufgabe anschreiben, & sagen: "mach dasselbe mit *diesen* beiden Zahlen, was ich mit den früheren getan habe". Aber ich kann auch sagen: "Wenn Du mit diesen beiden machst, was ich mit den andern gemacht habe, so wirst Du zu der Zahl ... kommen". Was ist das für ein Satz? "Du wirst das & das schreiben" ist eine Vorhersage. 'Wenn Du das & das schreiben wirst, wirst Du's so gemacht haben, wie ich Dir's gezeigt habe' bestimmt, was er "seinem Beispiel folgen" nennt.

Ms-124 18[2] 'Die Lösung dieser Aufgabe ist ...' – Wenn ich das lese, ehe ich die Aufgabe gerechnet habe, – was ist das für ein Satz?

Ms-124 18[4] & 19[1] "Wenn Du mit diesen Zahlen machst, was ich Dir mit den andern vorgemacht habe, wirst Du ... erhalten" – das heißt doch: 'Das Resultat dieser Rechnung ist ...' – & das ist keine Vorhersage, sondern ein mathematischer Satz. Aber es ist dennoch auch eine Vorhersage! – Eine Vorhersage besonderer Art. Wie der, der am Ende findet daß sich beim Addieren der Kolumne wirklich das & das ergibt, wirklich überrascht sein kann; z.B. ausrufen kann: ja, bei Gott, es kommt heraus! Denke Dir nur diesen Vorgang des Vorhersagens & der Bestätigung als ein besonderes Sprachspiel – ich meine: isoliert von dem Übrigen der Arithmetik & ihrer Anwendung.

Ms-124 24[2] & 11.06.1941

- 25[1] Was ist an diesem Vorhersagespiel so sonderbar? Was mir sonderbar erscheint, würde entfernt, wenn die Vorhersage lautete: "Wenn Du glauben wirst, meinem Beispiel gefolgt zu sein, wirst Du *das* herausgebracht haben." , oder: "Wenn Dir alles richtig scheinen wird, wird das das Resultat sein." Dies Spiel konnte man sich (z.B.) mit dem Eingeben eines bestimmten Giftes verbunden denken, & die Vorhersage wäre, daß die Injektion unsere Fähigkeiten, unser Gedächtnis z.B., in der & der Weise beeinflußt. – Aber, wenn wir uns das Spiel mit dem Eingeben eines Giftes denken können, warum nicht mit dem Eingeben eines Heilmittels? Aber auch dann kann das Schwergewicht der Vorhersage noch immer darauf ruhen, daß der *gesunde* Mensch *das* als Resultat ansieht. Oder vielleicht: daß den gesunden Menschen *das* befriedigt.
- Ms-124 "Folge mir, so wirst Du das herausbringen." heißt natürlich
25[3] nicht: "Folge mir, dann wirst Du mir folgen" – noch: "Rechne *so* dann wirst Du *so* rechnen". – Aber was heißt "Folge mir"? Im Sprachspiel kann es einfach ein Befehl sein: "Folge mir jetzt!".
- Ms-124 Was ist der Unterschied zwischen den Vorhersagen: "Wenn Du
26[1] richtig rechnest, wirst Du *das* erhalten" – &: "Wenn Du glauben wirst, daß Du richtig rechnest, wirst Du *das* erhalten"? Wer sagt nun, daß in meinem obigen Sprachspiel die Vorhersage nicht eben das letztere bedeutet? Es scheint, sie bedeutet das nicht – – aber wie *zeigt* sich das? Frage Dich *unter welchen Umständen* würde die Vorhersage das eine, unter welchen das andere vorherzusagen scheinen. Denn es ist klar: es kommt hier auf die übrigen Umstände an.

Ms-124 26[2] Wer mir vorhersagt, daß ich *das* herausbringen werde, sagt der nicht eben vorher daß ich dieses Resultat für richtig halten werde? – “Aber” – sagst Du vielleicht – “nur eben weil es wirklich richtig *ist!*” – Aber was heißt das: “Ich halte die Rechnung für richtig weil sie richtig ist”?

Ms-124 26[3] & 27[1] Und doch kann man sagen: In meinem Sprachspiel denkt der Rechnende nicht daran, daß die Tatsache, daß er *dies* herausbringt, eine Eigentümlichkeit *seines* Wesens ist; die Tatsache erscheint ihm nicht als eine psychologische. Eher stelle ich mir ihn unter dem Eindruck vor, daß er nur einem bereits vorhandenen Faden gefolgt ist. Und das Wie des Folgens als eine Selbstverständlichkeit hinnimmt; & nur *eine* Erklärung seiner Handlung kennt, nämlich: den Lauf des Fadens.

Ms-124 27[2] & 28[1] Er läßt sich allerdings ablaufen, indem er der Regel, oder den Beispielen folgt, aber was er tut betrachtet er nun nicht als Besonderheit *seines* Ablaufs, er sagt nicht: “also *so* bin ich abgelaufen”, sondern: “also *so* läuft es ab”.

Ms-124 28[2] Aber wenn nun Einer dennoch am Ende der Rechnung in unserm Sprachspiel sagte: “also *so* bin ich abgelaufen!” – oder: “also *dieser* Ablauf befriedigt mich!” – Kann ich nun sagen, er habe das (ganze) Sprachspiel mißverstanden? Doch gewiß nicht! Wenn er nicht sonst eine unerwünschte Anwendung von ihm macht.

Ms-124 28[3] **5** Ist es nicht die *Anwendung* der Rechnung die jene Auffassung hervorruft, daß die Rechnung abläuft und nicht wir?

- Ms-124 Die verschiedenen 'Auffassungen' müssen verschiedenen
29[1] Anwendungen entsprechen.
- Ms-124 Denn es ist allerdings ein Unterschied dazwischen: überrascht
29[3] zu sein, daß ich *davon* befriedigt bin; überrascht zu sein, daß
die Ziffern auf dem Papier sich *so* zu benehmen scheinen; &
überrascht zu sein darüber, daß *das* herauskommt. Aber in
jedem Fall sehe ich die Rechnung in anderm Zusammenhang.
- Ms-124 Ich rede von dem Gefühl des 'Herausbekommens', wenn wir
29[4] & etwa eine längere Kolumne von Zahlen verschiedener Gestalt
30[1] addieren & so eine Zahl wie 1000000 herauskommt, wie uns
zuvor gesagt worden war. "Ja, bei Gott, wieder eine Null –"
sagen wir. "Man sähe es den Zahlen nicht an –", könnte ich
auch sagen.
- Ms-124 Wie wäre es, wenn wir sagten– statt: '6 × 6 ergibt 36' – : 'Das
30[2] Ergeben der Zahl 36 durch 6 × 6'? – Den *Satz* ersetzen durch
einen substantivischen Ausdruck. (Der Beweis zeigt *das*
Ergeben.)
- Ms-124 Warum willst Du die Mathematik immer unter dem Aspekt
30[4] des Findens & nicht des Tuns betrachten?
- Ms-124 Von großem Einflusse muß es sein, daß wir die Wörter
30[5] "richtig" & "wahr" & "falsch" & die Form der Aussage im
Rechnen gebrauchen. (Kopfschütteln & Nicken)
- Ms-124 Warum soll ich sagen, daß das Wissen, daß alle Menschen, die
31[1] rechnen gelernt haben, *so* rechnen, kein *mathematisches* Wissen
ist? Weil es auf einen andern Zusammenhang hindeutet.

- Ms-124 31[3] Ist also Berechnen, was Einer durch Rechnung herauskriegen wird, schon angewandte Mathematik? – & also auch: Berechnen, was ich selbst herauskriegen werde?
- Ms-124 34[1] **6** 13.06.1941
Es ist ja gar kein Zweifel, daß math. Sätze *in gewissen Sprachspielen* die Rolle von Regeln der Darstellung spielen, im Gegensatz zu Sätzen der Darstellung.
- Ms-124 34[3] Aber das sagt nicht, daß dieser Gegensatz nicht nach allen Richtungen hin abfällt. Und *das* wieder nicht, daß der Gegensatz nicht von der größten Wichtigkeit ist.
- Ms-124 35[1] Das piédestal der Mathematik, ist die Rolle, welche ihre Sätze in unsern Sprachspielen spielen.
- Ms-124 36[2] Was der math. Beweis demonstriert wird als interne Relation hingestellt & dem Zweifel entzogen.
- Ms-124 36[3] & **7** Was ist einem mathematischen Satz & einem mathematischen Beweis gemein, daß sie beide “mathematisch” heißen? Nicht, daß der math. Satz mathematisch bewiesen sein muß; nicht, daß der math. Beweis einen math. Satz beweisen muß. Was hat der unbewiesene Satz (das Axiom) mathematisches? (&) was hat er gemein mit einem mathematischen *Beweis*?
- Ms-124 37[1] Soll ich antworten: ‘Die Schlußregeln des math. Beweises sind immer math. Sätze’? Oder: ‘Math. Sätze & Beweise dienen dem Schließen’? Das wäre schon näher dem Wahren.

Ms-124 37[3] & 38[1] **8** Der Beweis muß eine interne Relation etablieren, nicht eine äußere. Denn wir könnten uns auch einen Vorgang der Transformation eines Satzes durchs *Experiment* denken & eine, die zum Vorhersagen des vom transformierten Satz Behaupteten benützt würde. Man könnte sich z.B. (ganz gut) denken, daß Zeichen durch hinzulegen anderer Zeichen sich solchermaßen verschöben, daß sie eine wahre Vorhersage bilden auf der Grundlage der in ihrer Anfangslage ausgedrückten Bedingungen. Ja, wenn Du willst, kannst Du den rechnenden Menschen als einen Apparat dieser Art betrachten.

Ms-124 38[2] Denn, daß ein Mensch das Resultat *errechnet*, in dem Sinne: daß er nicht gleich das Resultat, sondern erst verschiedenes anderes hinschreibt, macht ihn nicht weniger zu einem physikalisch-chemischen Hilfsmittel, eine Zahl zu erzeugen, wenn gewisse andere ihm zugebracht werden.

Ms-124 38[3] & 39[1] Ich müßte also sagen: Der bewiesene Satz ist nicht: diejenige Zeichenfolge, welche der so & so abgerichtete Mensch unter den & den Umständen erzeugt.

Ms-124 39[2] 14.06.1941
Wenn wir den Beweis so betrachten, ändert sich, was wir erblicken, gänzlich. Die Zwischenstufen werden ein uninteressantes Nebenprodukt. (Wie im Innern des Automaten ein Geräusch, ehe er uns die Ware zuwirft.)

- Ms-124 39[5] & 40[1] **9** Wir sagen: der Beweis sei ein Bild. Aber dies Bild bedarf doch der Approbation, die wir ihm (nämlich) beim Nachrechnen erteilen. –
- Ms-124 40[2] Wohl wahr; aber wenn es von dem Einen die Approbation erhalte, von dem Andern nicht & sie sich nicht *verständigen* könnten – hätten wir dann ein Rechnen? Also ist es nicht die Approbation allein, die es zur Rechnung macht, sondern die Gleichheit der Approbationen.
- Ms-124 40[3] Denn es ließe sich ja auch ein Spiel denken, in welchem Menschen durch Ausdrücke, etwa ähnlich denen allgemeiner Regeln, angeregt, für bestimmte praktische Aufgaben, also ad hoc, sich Zeichenfolgen einfallen lassen, & daß sich dies sogar bewährte. Und hier brauchen die ‘Rechnungen’, wenn man sie so nennen wollte, nicht miteinander übereinstimmen. (Hier könnte man von ‘Intuition’ reden.)
- Ms-124 41[1] Die Übereinstimmung der Approbationen ist die Vorbedingung unsers Sprachspiels, sie wird nicht in ihm konstatiert.

Ms-124 44[3] & 45[1] Wenn die Rechnung ein Experiment ist & *die Bedingungen sind erfüllt* dann müssen wir als Ausgang nehmen, was kommt; & wenn die Rechnung ein Experiment ist, so ist der Satz, daß sie das & das ergibt, doch der Satz, daß unter solchen Bedingungen diese Art von Zeichen entsteht. Und entsteht also unter diesen Bedingungen einmal ein, einmal ein anderes Resultat, so darf man nun nicht sagen "da stimmt etwas nicht", oder "beide Rechnungen können nicht in Ordnung sein", sondern man müßte sagen: diese Rechnung ergibt nicht immer das gleiche Resultat (*warum*, muß nicht bekannt sein). Aber obwohl der Vorgang nun ebenso interessant, ja vielleicht noch interessanter ist, haben wir nun keine Rechnung mehr. Und das ist natürlich wieder eine grammatische Bemerkung über den Gebrauch des Wortes "Rechnung". Und natürlich hat diese Grammatik eine Pointe.

Ms-124 46[1] Was heißt es, sich über einen Unterschied im Resultat einer Rechnung *verständigen*? Es heißt doch, zu einem gleichförmigen Rechnen zu gelangen. Und kann man das nicht so kann nun Einer nicht sagen, der Andre rechne auch; nur eben mit anderen Ergebnissen.

Ms-124 46[2] **10** Wie ist es nun, – soll ich sagen: Der gleiche Sinn könne nur *einen* Beweis haben? Oder: wenn ein Beweis gefunden wird, ändere sich der Sinn? Freilich würden Einige sich dagegen wehren, sagen: 'So kann man also nie den Beweis eines Satzes finden, denn, hat man ihn gefunden, so ist er nicht mehr Beweis *dieses* Satzes.' Aber das sagt noch gar nichts. –

Ms-124 Es kommt eben darauf an, *was* den Sinn des Satzes festlegt.
47[1] Wovon wir sagen wollen, es lege den Sinn des Satzes fest. Der
Gebrauch muß ihn festlegen. Aber was rechnen wir zum
Gebrauch? –

Ms-124 16.06.1941
47[2] Die Beweise beweisen denselben Satz, heißt etwa: beide
erweisen ihn für uns als ein brauchbares Instrument zu dem
Gleichen.

Ms-124 Und der Zweck ist eine Anspielung auf Außermathematisches.

47[3]

Ms-124 Ich sagte einmal: 'Wenn Du wissen willst, was ein math. Satz
47[4] & sagt, sieh', was sein Beweis beweist. Nun, ist darin nicht Wahres
& Falsches? Ist der Sinn, der Witz, eines math. Satzes wirklich
48[1] klar, wenn man nur seinen Beweis versteht?

Ms-124 Dem Russellschen " $\sim f(f)$ " fehlt vor allem die Anwendung, &
48[2] daher der Sinn. Wendet man diese Form aber dennoch an,
dann ist nicht gesagt, daß ' $f(f)$ ' ein Satz in irgendeinem
gewohnten Sinn sein muß, oder ' $f(\xi)$ ' eine Satzfunktion. Denn
der Begriff des Satzes, außer der des Satzes der Logik, ist ja
durch Russell nur in allgemeinen, herkömmlichen Zügen
erklärt. Man sieht hier auf die Sprache, ohne auf das
Sprachspiel zu sehen.

Ms-124 Wenn wir von verschiedenen Bilderreihen sagen, sie
48[3] & demonstrierten, z.B., daß $25 \times 25 = 625$, so ist leicht genug zu
49[1] erkennen, was den *Ort* dieses Satzes fixiert, den beide Wege
erreichen.

Ms-124 49[3] & 50[1] Der andre Beweis reiht den Satz in eine neue Ordnung ein; dabei findet oft ein Übersetzen einer Art von Operation in eine gänzlich andere statt. Wie wenn wir Gleichungen in Kurven übertragen. Und dann sehen wir etwas für die Kurven ein & dadurch für die Gleichungen.

Aber mit welchem Rechte überzeugen wir uns durch einen Gedankengang, der dem Gegenstand unsrer Gedanken scheinbar ganz heterogen ist? Nun, unsre Operationen liegen jenem Gegenstand auch nicht ferner, als, etwa, das Dividieren im Dezimalsystem, dem verteilen von Nüssen. Besonders, wenn man sich vorstellt (was man leicht kann) daß jene Operation ursprünglich zu einem andern Zweck als dem des Teilens u. dergl. erfunden worden wäre.

Ms-124 50[2] & 51[1] Fragst Du: "Mit welchem Recht?" so ist die Antwort: Vielleicht mit gar keinem. – Mit welchem Recht sagst Du, daß die Fortsetzung dieses Systems mit jenem immer parallel laufen wird? (Es ist als ob Du Zoll & Fuß *beide* als Einheit festsetztet & behauptetest, 12n Zoll werden immer mit n Fuß gleich lang sein.)

Ms-124 51[2] & 52[1] 17.06.1941
Wenn zwei Beweise denselben Satz beweisen, so kann man sich allerdings Umstände denken, in denen die ganze diese Beweise verbindende Umgebung wegfiel, sodaß sie allein & nackt dastünden & kein Grund vorhanden wäre, zu sagen sie hätten eine gemeinsame Pointe, sie bewiesen denselben Satz. Man muß sich nur denken, daß die Beweise ohne den, sie beide umhüllenden & verbindenden, Organismus der

Anwendungen, sozusagen nackt & und bloß, dastünden. (Wie zwei Knochen aus dem ungeheuer mannigfachen Zusammenhang des Organismus gelöst; in dem allein wir gewohnt sind, an sie zu denken.)

Ms-124 52[2] & 53[1] **11** Nimm an, man rechnete mit Zahlen & verwendet manchmal auch die Division durch Ausdrücke von der Form $(n - n)$, & erhielt auf diese Weise hie & da andere als die normalen Resultate des Multiplizierens, etc. Das störe aber niemand. – Vergleiche damit: Man legt Listen, Verzeichnisse, von Personen an, aber nicht wie wir es tun, alphabetisch; & so kommt es, daß der gleiche Name in mancher Liste öfters als einmal figuriert. – Aber nun kann man annehmen, daß das niemandem auffällt; oder, daß die Leute es sehen, es ihnen aber weiters nichts macht. Wie man Leute eines Stammes denken könnte, die, wenn sie Münzen zur Erde fallen lassen, es nicht der Mühe Wert halten sie aufzuheben. (Sie haben dann etwa eine Redensart: “Es gehört den Andern” oder dergleichen.)

Ms-124 53[2] Nun aber ändert sich die Zeit, & die Menschen fangen an (zuerst nur wenige) Exaktheit zu fordern. Mit Recht, mit Unrecht? – Waren die früheren Verzeichnisse *nicht* eigentlich Verzeichnisse? –

Ms-124 53[3] & 54[1] Sagen wir, wir erhielten manche unserer Rechenresultate durch einen versteckten Widerspruch. Nun – sind sie dadurch illegitim? – Aber wenn wir nun solche Resultate durchaus nicht anerkennen wollen & doch fürchten, es könnten welche durchschlüpfen. – Nun dann haben wir also eine Idee die einem neuen Kalkül als Vorbild dienen soll. Wie man die Idee zu einem Spiel haben kann.

Ms-124 54[2] Der R'sche Widerspruch ist nicht, weil er ein Widerspruch ist, beunruhigend, sondern weil das ganze Gewächs, dessen Ende er ist, ein Krebsgewächs ist, das zweck- & sinnlos aus dem normalen Körper herauszuwachsen scheint.

Ms-124 54[3] Kann man nun sagen: "Wir wollen einen Kalkül, der uns sicherer die Wahrheit sagt"?

Ms-124 18.06.1941

54[4] & 55[1] Aber Du kannst doch einen Widerspruch nicht gelten lassen! – Warum nicht? Wir gebrauchen ihn ja manchmal in unserer Rede, freilich selten – aber man könnte sich eine Sprachtechnik denken, in der er ein ständiges Implement ist. Man könnte z.B. von einem Objekt in Bewegung sagen, es existiere & es existiere nicht an diesem Ort; Veränderung könnte durch den Widerspruch ausgedrückt werden.

Ms-124 55[2] Nimm ein Thema, wie das Haydnsche (Chorale St. Antoni), nimm den Teil der Brahmschen Variationen, der dem ersten Teil des Themas entspricht & stell die Aufgabe den zweiten Teil der Variation im Stil ihres ersten Teiles zu konstruieren. Das ist ein Problem (sehr) ähnlich den mathematischen Problemen. Ist die Lösung gefunden, etwa wie Brahms sie gibt, so zweifelt man nicht, daß dies die Lösung sei.

Ms-124 55[3] & 56[1] Mit diesem Weg sind wir einverstanden. Und doch ist es hier klar, daß es leicht verschiedene Wege geben kann, kann mit deren jedem wir uns einverstanden erklären können, deren jeden wir konsequent nennen können.

Ms-124 56[3] & 57[1] 'Wir machen lauter legitime – d.h. in den Regeln erlaubte – Schritte, & auf einmal kommt ein Widerspruch heraus. Also ist das Regelverzeichnis, wie es ist, nichts nutz, denn der Widerspruch wirft das ganze Spiel um.' Warum läßt Du ihn es umwerfen? Aber ich will, daß man nach der Regel soll *mechanisch* weiter schließen können, ohne je zu widersprechenden Resultaten zu gelangen. Nun, welche Art der Voraussicht willst Du? Eine, die Dein gegenwärtiger Kalkül nicht zuläßt? Nun, dadurch ist er nicht ein schlechtes Stück Mathematik, oder, nicht im vollsten Sinne Mathematik. Der Sinn des Wortes "mechanisch" verführt Dich.

Ms-124 12 Wenn Du zu einem praktischen Zweck einen Widerspruch
57[3] mechanisch vermeiden willst, wie Dein Kalkül es jetzt nicht
kann, so ist das etwa, wie wenn Du nach einer Konstruktion
des ...-Ecks suchst, das Du bis jetzt nur durch Probieren hast
zeichnen können; oder nach einer Lösung der Gleichung 3^{ten}
Grades, die Du bisher nur approximiert hast. Nicht schlechte
Mathematik wird hier verbessert, sondern ein neues Stück
Mathematik geschaffen.

Ms-124 19.06.1941

57[4] & Nimm an, ich wollte eine Irrationalzahl so bestimmen, daß in
58[1] ihrer Entwicklung nicht die Figur '777' vorkommt. Ich könnte π
nehmen & bestimmen: wenn jene Figur entsteht setzen wir statt
ihr '000'. Nun sagt man mir: das genügt nicht, denn der,
welcher die Stellen berechnet, ist verhindert, auf die
vorhergehenden zurückzuschauen. Nun brauche ich einen
andern Kalkül; einen in dem ich mich zum Voraus versichern
kann, er könne '777' nicht liefern. Ein mathematisches Problem.

Ms-124 58[2] & 59[1] 'Solange die Widerspruchsfreiheit nicht bewiesen ist, kann ich nie ganz sicher sein, daß mir jemand, der gedankenlos, aber gemäß den Regeln, rechnet, nicht irgend etwas Falsches herausrechnet.' So lange also jene Voraussicht nicht gewonnen ist, ist der Kalkül unzuverlässig. – Aber denke, ich fragte: "Wie unzuverlässig?" – Wenn wir von Graden der Unzuverlässigkeit redeten, könnten wir ihr dadurch nicht den metaphysischen Stachel nehmen? Waren die ersten Regeln des Kalküls nicht gut? Nun, wir gaben sie nur *weil* sie gut waren. – Wenn sich später ein Widerspruch ergibt, – haben sie *nicht* ihre Pflicht getan? Nicht doch, sie waren für diese Anwendung nicht gegeben worden.

Ms-124 59[2] Ich kann meinem Kalkül eine bestimmte Art der Voraussicht geben wollen. Sie macht ihn nicht zu einem *eigentlicheren* Stück Mathematik, aber, etwa, zu gewissem Zweck brauchbarer.

Ms-124 59[3] & 60[1] Die Idee des Mechanisierens der Math.. Die Mode des axiomatischen Systems.

Ms-124 60[4] & 61[1] **13** Aber nehmen wir an, die 'Axiome' & 'Schlußweisen' seien nicht nur irgendwelche Konstruktionsweisen, sondern sie überzeugten uns auch durchaus von dem Konstruierten! Nun, dann heißt das, daß es Fälle gibt, in denen die Konstruktion aus diesen Bausteinen *nicht* überzeugt. Und tatsächlich sind die logischen Axiome gar nicht überzeugend, wenn wir für die Satzvariablen Strukturen einsetzen, die niemand ursprünglich als mögliche Werte vorhergesehen hat, als man nämlich ihrer Wahrheit (im Anfang) die unbedingte Anerkennung gab.

Ms-124 61[2] Wie aber, wenn man sagt: die Axiome und Schlußweisen sollen doch so gewählt werden, daß sie keinen falschen Satz beweisen können?

Ms-124 61[3] 'Wir wollen nicht nur einen ziemlich zuverlässigen, sondern einen *absolut* zuverlässigen Kalkül. Die Mathematik muß *absolut* sein.'

Ms-124 61[4] & 62[1] Nimm an, ich hätte die Regeln für's Spiel 'Fuchs & Jäger' aufgestellt – stellte mir das Spiel unterhaltlich & hübsch vor – später finde ich, daß die Jäger immer gewinnen können, wenn man einmal weiß, wie. Ich bin nun, sagen wir, mit meinem Spiel unzufrieden. Die von mir gegebenen Regeln haben ein Resultat gezeitigt, daß ich nicht vorausgesehen hatte & das mir das Spiel verdirbt.

Ms-124 62[2] **14** 20.06.1941

'N. kam darauf, daß man bei den Berechnungen oft durch Ausdrücke der Form '(n - n)' gekürzt hatte. Er wies die dadurch entstehende Diskrepanz der Resultate nach & zeigte, wie Menschenleben durch diese Art des Rechnens verloren worden waren.'

Ms-124 Aber nehmen wir an, auch die Andern hätten jene
62[3] & Widersprüche gemerkt, nur sich nicht darüber Rechenschaft
63[1] geben können woher sie kämen. Sie hätten, sozusagen, mit
schlechtem Gewissen gerechnet. Sie hätten zwischen
widersprechenden Resultaten *eins* gewählt, aber mit
Unsicherheit, während ihnen N's Entdeckung vollkommene
Sicherheit gegeben hätte. – Aber sagten sie sich: 'mit unserm
Kalkül ist etwas nicht in Ordnung'? War ihre Unsicherheit von
der Art der unsern, wenn wir eine physikalische Berechnung
anstellen, aber nicht sicher sind, ob diese Formeln hier wirklich
das richtige Resultat ergeben? Oder war es ein Zweifel darüber,
ob ihre Mathematik wirklich Mathematik sei? In diesem Falle:
was taten sie, um sich davon zu überzeugen?

Ms-124 Die Leute haben bisher nur verhältnismäßig selten vom Kürzen
64[2] durch Ausdrücke vom Wert 0 Gebrauch gemacht. Irgendeinmal
entdeckt Einer, daß sie auf diese Weise wirklich jedes beliebige
Resultat ausrechnen können. – Was tun sie nun? Nun, wir
könnten uns sehr verschiedenes vorstellen. Sie können, z.B.,
nun erklären, diese Art des Rechnens habe (damit) ihren Witz
verloren, & *so* sei künftig nicht (mehr) zu rechnen.

Ms-124 'Er glaubt, er rechnet – möchte man sagen – er rechnet
64[3] tatsächlich nicht.'

Ms-124 **15** Wenn die Rechnung für mich ihren Witz verloren hat,
64[4] & sobald ich weiß, wie ich nun alles Beliebige errechnen kann –
65[1] hat sie keinen gehabt, solange ich das *nicht* wußte?

- Ms-124 65[2] Ich mag freilich jetzt alle diese Rechnungen als nichtig erklären – ich führe sie eben jetzt nicht mehr aus – aber waren es darum keine Rechnungen?
- Ms-124 65[3] Ich habe (einmal), ohne es zu wissen, über einen Widerspruch geschlossen. Ist mein Resultat nun falsch, oder doch unrecht erworben?
- Ms-124 65[4] Wenn der Widerspruch wirklich so gut versteckt ist, daß wir ihn nicht merken, warum sollen wir nicht das, was wir jetzt tun das eigentliche Rechnen nennen?
- Ms-124 65[5] & 66[1] Wir sagen, der Widerspruch würde den Kalkül *vernichten*. Aber wenn er nun sozusagen in winzigen Dosen aufträte, gleichsam blitzweise, nicht als ein ständiges Rechenmittel, würde er da das Spiel auch vernichten?
- Ms-124 66[2] 21.06.1941
Denk' Dir, die Leute hätten sich eingebildet $(a + b)^2$ müsse gleich sein $a^2 + b^2$. (Ist das eine Einbildung von der Art: es müsse eine Dreiteilung des Winkels mit Lineal und Zirkel geben?) Kann man sich also so einbilden, zwei Rechnungsweisen müßten dasselbe ergeben, wenn es nicht der Fall ist?

- Ms-124 66[3] & 67[1] Ich addiere eine Kolumne, addiere sie auf verschiedene Weise, nehme z.B. die Zahlen in verschiedener Reihenfolge & kriege immer wieder, regellos, etwas anderes heraus. – Ich werde vielleicht sagen: “Ich bin ganz verwirrt; ich mache entweder regellos Rechenfehler, oder ich mache gewisse Rechenfehler in bestimmten Verbindungen: etwa, auf ‘ $6 + 3 = 9$ ’ sage ich immer ‘ $7 + 7 = 15$ ’. Oder ich könnte mir denken, daß ich plötzlich einmal in der Rechnung subtrahiere statt zu addieren, aber nicht denke, daß ich da etwas anderes tue.
- Ms-124 67[2] Nun könnte es sein, daß ich den Fehler nicht fände & mich für geistesgestört hielte. Aber das müßte meine Reaktion nicht sein.
- Ms-124 67[3] ‘Der Widerspruch hebt den Kalkül auf’ – woher diese Sonderstellung? Sie ist, glaube ich, durch etwas Phantasie gewiß zu erschüttern.
- Ms-124 67[4] & 68[1] Um diese philosophischen Probleme zu lösen muß man Dinge miteinander vergleichen, die noch niemand ernstlich miteinander verglichen hat.
- Ms-124 68[2] Man kann auf diesem Gebiete allerlei fragen, was zwar zur Sache gehört, aber nicht durch die Mitte der Sache führt. Eine bestimmte Reihe von Fragen führt durch die Mitte, ins Freie. Die andern werden nebenbei beantwortet. Den Weg durch die Mitte zu finden ist ungeheuer schwer.
- Ms-124 68[3] Er geht über *neue* Beispiele & Vergleiche. Die abgebrauchten zeigen ihn nicht.
- Ms-124 23.06.1941

- 69[1] Nehmen wir an, der R'sche Widerspruch wäre nie gefunden worden. Nun – ist es ganz klar, daß wir dann einen falschen Kalkül besessen hätten? Gibt es denn hier nicht verschiedene Möglichkeiten?
- Ms-124
69[2] Und wie, wenn man den Widerspruch zwar gefunden, sich aber weiter nicht über ihn aufgeregt, & etwa bestimmt hätte, es seien aus ihm keine Schlüsse zu ziehen. (Wie ja auch niemand aus dem 'Lügner' Schlüsse zieht.) Wäre das ein offenbarer Fehler gewesen?
- Ms-124
69[3] &
70[1] "Aber dann ist doch das kein eigentlicher Kalkül! Er verliert ja alle *Strenge!*" Nun, nicht *alle*. Und er hat nur dann nicht die volle *Strenge*, wenn man ein bestimmtes Ideal der *Strenge* hat, einen bestimmten Stil der Mathematik baut.
- Ms-124
70[2] 'Aber ein Widerspruch in der Math. verträgt sich doch nicht mit ihrer Anwendung. Er macht, wenn er konsequent, d.h. zur Erzeugung *beliebiger* Resultate verwendet wird, die Anwendung der Math. zu einer Farce, oder einer Art überflüssiger Zeremonie. Seine Wirkung ist etwa die, unstarrer Maßstäbe, die durch Dehnen & Zusammendrücken verschiedene Messungsergebnisse zulassen.' Aber war das Messen durch Abschreiten *kein* Messen? Und wenn die Menschen mit Maßstäben aus Teig arbeiteten, wäre das an sich schon falsch zu nennen?
- Ms-124
70[3] Könnte man sich nicht leicht Gründe denken, weshalb eine gewisse Dehnbarkeit der Maßstäbe erwünscht sein könnte?

- Ms-124 71[1] 'Aber ist es nicht richtig, die Maßstäbe aus immer härterem, unveränderlichem Material herzustellen? Gewiß ist es richtig; wenn man es so will.'
- Ms-124 71[2] 'Also redest Du dem Widerspruch das Wort?!' Durchaus nicht; so wenig, wie den weichen Maßstäben.
- Ms-124 71[3] *Ein Fehler ist zu vermeiden: Man denkt, der Widerspruch muß sinnlos sein: d.h., wenn man z.B. die Zeichen 'p', '~', ' • ' konsequent benützt, so kann 'p • ~p' nichts sagen. – Aber denke: was heißt, den & den Gebrauch 'konsequent fortsetzen'? ('Dieses Kurvenstück konsequent fortsetzen'.)*
- Ms-124 71[4] & 72[1] **16** Wozu braucht die Mathematik eine Grundlegung?! Sie braucht sie, glaube ich, ebenso wenig, wie die Sätze über physikalische Gegenstände oder Sinnesdaten, eine *Analyse*. Wohl aber bedürfen die mathematischen, sowie jene andern Sätze einer Klarlegung ihrer Grammatik.
- Ms-124 72[2] Die *mathematischen* Probleme der sogenannten Grundlagen liegen für uns der Math. so wenig zu Grunde, wie der gemalte Fels einer gemalten Burg.
- Ms-124 72[3] 'Aber wurde die Fregesche Logik durch den Widerspruch zur Grundlegung der Arithmetik nicht untauglich? Doch! Aber wer sagte denn auch, daß sie zu diesem Zweck tauglich sein müsse?!
- Ms-124 72[4] & 73[1] 24.06.1941
Man könnte sich sogar denken, daß man die Fregesche Logik einem Wilden als Instrument gegeben hätte, um damit arithm.

Sätze abzuleiten. Er habe den Widerspruch abgeleitet, ohne zu merken, daß es einer ist, & aus ihm nun beliebige wahre & falsche Sätze.

Ms-124 'Ein guter Engel hat uns bisher bewahrt, *diesen* Weg zu gehen.'
73[2] Nun, was willst Du mehr? Man könnte, glaube ich, sagen: Ein guter Engel wird immer nötig sein, was immer Du tust.

Ms-124 **17** Man sagt: das Rechnen sei ein Experiment, um dadurch
73[3] & zu zeigen, wie es so praktisch sein kann. Denn vom Experiment
74[1] weiß man, daß es wirklich praktischen Wert hat. Nur vergißt man, daß es diesen Wert besitzt vermöge einer Technik, die ein naturgeschichtliches Faktum ist, deren Regeln aber nicht die Rolle von Sätzen der Naturgeschichte haben.

Ms-124 "Die Grenzen der Empirie" – (Leben wir, weil es praktisch ist
74[2] zu leben? Denken wir, weil zu denken praktisch ist?)

Ms-124 25.06.1941
74[3] Daß ein Experiment praktisch ist, das weiß er; also ist die Rechnung ein Experiment.

Ms-124 Unsre experimentellen Handlungen haben allerdings ein
74[4] charakteristisches Gesicht. Wenn ich jemand in einem Laboratorium eine Flüssigkeit in eine Proberöhre gießen & über einer Bunsenflamme erhitzen sehe, bin ich geneigt zu sagen, er mache ein Experiment.

- Ms-124 74[5] & 75[1] Nehmen wir an, Leute, welche zählen können, wollen – so wie wir – zu verschiedenerlei praktischen Zwecken Zahlen erfahren. Und dazu fragen sie gewisse Leute, die, wenn ihnen das praktische Problem erklärt wurde, die Augen schließen, & sich die dem Zweck entsprechende Zahl einfallen lassen – – so läge hier keine Rechnung vor, wie verlässlich immer die Zahlangabe sein mag. Ja diese Zahlbestimmung könnte praktisch viel verlässlicher sein, als jede Rechnung.
- Ms-124 75[2] Eine Rechnung – könnte man sagen – ist etwa ein Teil der Technik eines Experiments, aber allein kein Experiment.
- Ms-124 75[3] 27.06.1941
Vergißt man denn, daß zum Experiment eine bestimmte *Anwendung* des Vorgangs gehört? Und die Rechnung vermittelt die Anwendung.
- Ms-124 76[1] Würde denn jemand daran *denken*, das Übersetzen einer Chiffre mittels eines Schlüssels ein Experiment zu nennen?
- Ms-124 76[3] Wenn ich zweifle, ob die Zahlen n und m multipliziert l ergeben werden, so bin ich nicht *darüber* im Zweifel, ob eine Verwirrung in unserm Rechnen ausbrechen wird & etwa die Hälfte der Menschen eines – die andere Hälfte etwas andres für richtig erklären werden.

Ms-124 'Experiment' ist eine Handlung nur von einem gewissen
76[4] & Gesichtspunkt gesehen. Und es ist *klar*, daß die
77[1] Rechnungshandlung auch ein Experiment sein kann. Ich kann
z.B. prüfen wollen, was dieser Mensch unter solchen
Umständen, auf diese Aufgabenstellung hin, rechnet. – Aber, ist
es nicht eben das, was Du fragst, wenn Du wissen willst,
wieviel 52×63 ist! Das mag ich wohl fragen – meine Frage mag
sogar in diesen Worten ausgedrückt sein. (Vergl. damit: Ist der
Satz "Horch, sie stöhnt!" ein Satz über ihr Benehmen, oder
über ihr Leiden?) Aber wie ist es nun, wenn ich seine
Rechnung vielleicht *nachrechne*? – 'Nun, dann mache ich noch
ein Experiment um ganz sicher herauszufinden, daß alle
normalen Menschen so reagieren.' – Und wenn sie nun *nicht*
gleichförmig reagieren –: welches ist das mathematische
Resultat?

Ms-124 **18** "Soll die Rechnung praktisch sein, so muß sie Tatsachen
77[2] & mitteilen. Und das kann nur das Experiment." Aber welches
78[1] sind 'Tatsachen'? Glaubst Du, Du kannst zeigen, welche
Tatsache gemeint ist, indem Du etwa mit dem Finger auf sie
zeigst? Macht das schon die Rolle klar, welche die 'Feststellung'
einer Tatsache spielt? – Wenn nun die Mathematik erst den
Charakter dessen bestimmte, was Du 'Tatsache' nennst! 'Es ist
interessant zu wissen *wieviele* Schwingungen dieser Ton hat.'
Aber die Arithmetik hat Dich diese Frage erst gelehrt. Sie hat
Dich gelehrt, diese Art von Tatsachen zu sehen.

Ms-124 Die Mathematik – will ich sagen – lehrt Dich nicht einfach die
78[2] Antwort auf eine Frage; sondern ein ganzes Sprachspiel, mit
Fragen & Antworten.

- Ms-124 Sollen wir sagen, die *Mathematik* lehre uns zählen?
78[3]
- Ms-124 Kann man von der Mathematik sagen, sie lehre uns
79[1] experimentelle *Forschungsweisen*? Oder sie helfe uns, solche
Forschungsweisen finden?
- Ms-124 'Die Mathematik, um praktisch zu sein, muß uns Tatsachen
79[2] lehren.' – Aber müssen diese Tatsachen die *mathematischen*
Tatsachen sein? – Aber warum soll sie nicht, statt uns
'Tatsachen zu lehren', die Formen dessen schaffen, was wir
Tatsachen nennen?
- Ms-124 "Ja aber es bleibt doch empirische Tatsache, daß die Menschen
79[3] so rechnen!" – Ja, aber damit werden ihre Rechensätze nicht zu
empirischen Sätzen.
- Ms-124 "Ja, aber es muß doch unser Rechnen auf empirischen
79[4] & Tatsachen beruhen!" Gewiß. Der Zusammenhang besteht
80[1] (eben) darin, daß die Rechnung das Bild eines Experiments ist;
& zwar den Gang zeigt, den es so gut wie immer nimmt. Von
den anderen erhält es seine Pointe, seine Physiognomie: aber
das sagt durchaus nicht, daß die *Sätze* der Mathematik die
Funktionen der empirischen Sätze haben. (Das wäre beinahe,
als glaubte Einer: weil doch nur die Schauspieler im Stücke
auftreten, so könnten auf der Bühne des Theaters auch keine
andern Leute nützlich beschäftigt sein.)
- Ms-124 In der Rechnung *gibt es keine* kausalen Zusammenhänge, nur
80[2] die Zusammenhänge des Bildes.
- Ms-124 02.07.1941
82[4] &

- 85[1] 'Die Minute hat 60 Sekunden.' Das ist ein Satz ganz *ähnlich* einem mathematischen. Hängt seine Wahrheit von der Erfahrung ab? – Nun: könnten wir von Minuten und Sekunden reden, wenn es keinen Zeitsinn gäbe; wenn es keine Uhren gäbe, oder, aus physikalischen Gründen, nicht geben könnte; wenn alle die Zusammenhänge nicht statt hätten, die unsern Zeitmaßen Sinn & Bedeutung geben? In diesem Falle – würden wir sagen – hätte das Zeitmaß seinen Witz verloren (wie die Handlung des Mattsetzens ohne das Schachspiel) – oder es hätte dann einen ganz anderen Sinn. – Macht aber die eine so beschriebene Erfahrung den Satz falsch, die andre wahr? Nein; *das* beschreibe nicht seine Funktion. Er funktioniert ganz anders.
- Ms-124 84[2] 'Das Rechnen, um praktisch sein zu können, muß auf empirischen Tatsachen beruhen.' – Warum soll es nicht lieber bestimmen, was empirische Tatsachen *sind*?
- Ms-124 81[3] Erwäge: 'Unsre Mathematik wandelt Experimente in Definitionen um.'
- Ms-124 81[2] **19** Aber können wir uns keine menschliche Gesellschaft denken, in der es ebensowenig ein Rechnen, ganz in unserm Sinn, wie ein Messen, ganz in unserm Sinn, gibt? – Doch. – Aber wozu will ich mich dann bemühen, was Mathematik ist, herauszuarbeiten? Weil es bei uns eine Mathematik gibt & eine besondere Auffassung derselben, ein Ideal, gleichsam, ihrer Stellung & Funktion, – & dieses muß klar herausgearbeitet werden.

- Ms-124 82[1] Fordere nicht zuviel, & fürchte nicht, daß Deine gerechte Forderung in's Nichts zerrinnen wird.
- Ms-124 82[2] Meine Aufgabe ist es nicht, Russells Logik von *innen* anzugreifen, sondern von außen.
- Ms-124 82[3] D.h.: nicht, sie mathematisch anzugreifen – sonst triebe ich Mathematik – sondern ihre Stellung, ihr Amt.
- Ms-124 84[3] Meine Aufgabe ist es nicht über den Gödelschen Beweis (z.B.) zu reden; sondern an ihm vorbei zu reden.
- Ms-124 84[4] & 84[5] & 85[1] **20** Die Aufgabe, die Zahl der Wege zu finden, auf denen man den Fugen dieser Mauern ohne abzusetzen & ohne Wiederholung entlangfahren kann, erkennt jeder als *mathematische* Aufgabe. – Wäre die Zeichnung viel komplizierter & größer, nicht zu überblicken, so könnte man annehmen sie ändere sich, ohne das wir's merken, & dann wäre die Aufgabe, jene Zahl (die sich vielleicht gesetzmäßig ändert) zu finden, keine mathematische mehr. Aber auch wenn sie gleichbleibt, ist die Aufgabe dann nicht mathematisch. – Aber auch wenn die Mauer zu überblicken ist, so heißt das nicht, die Aufgabe ist eine mathematische – als sagte man: *diese* Aufgabe ist nun eine der Embryologie. Vielmehr: *hier* brauchen wir eine mathematische Lösung. (Wie: hier ist, was wir bedürfen, eine *Vorlage*.)
- Ms-124 85[2] 'Erkannten' wir das Problem als mathematisches, weil die Mathematik vom Nachfahren von Zeichnungen handelt?

Ms-124
85[3] &
86[1] Warum sind wir also geneigt, *dieses* Problem schlechtweg ein 'mathematisches' zu nennen? Weil wir es ihm gleich ansehen, daß hier die Beantwortung einer *mathematischen* Frage *so gut wie* alles ist, was wir brauchen. Obschon man das Problem, z.B., leicht als ein psychologisches sehen könnte. Ähnliches von der Aufgabe, aus einem Blatt Papier das & das zu falten.

Ms-124
86[2] &
87[1] Es kann so ausschauen, als ob die Mathematik hier eine Wissenschaft ist, die mit *Einheiten* Experimente macht, Experimente, bei denen es nämlich nicht auf die Arten der Einheiten ankommt, also nicht darauf, ob sie Erbsen, Glaskugeln, Striche, usw. sind. – Nur was von *allen* diesen gilt findet sie heraus. Also nichts über ihren Schmelzpunkt, aber, daß 2 und 2 von ihnen 4 sind. Und das Problem der Mauer № 1 ist eben ein mathematisches, d.h.: kann durch *diese* Art von Experiment gelöst werden. – Und worin das math. Experiment besteht? Nun, im Hinlegen & Verschieben von Dingen, Ziehen von Strichen, Anschreiben von Ausdrücken, Sätzen, etc. Und man muß sich dadurch nicht stören lassen, daß die äußere Erscheinung dieser Experimente nicht die physikalischer & chemischer, etc. hat, es Nur eine Schwierigkeit ist da: der Vorgang ist leicht genug zu sehen, zu beschreiben – aber *wie* ist es als Experiment anzuschauen? Welches ist hier der Kopf, welches der Fuß des Experiments? Welches sind die Bedingungen des Experiments, welches sein Resultat? Ist das Resultat das Rechnungsergebnis, oder das Rechnungsbild, oder die Zustimmung (worin immer diese besteht) des Rechnenden?

- Ms-124 87[2] Werden aber, etwa, die Prinzipien der Dynamik zu Sätzen der reinen Mathematik dadurch, daß man ihre Interpretation offen läßt & sie nur zum Erzeugen eines Maßsystems verwendet?
- Ms-124 87[3] "Der math. Beweis muß übersichtlich sein" – das hängt mit der Übersichtlichkeit jener Figur zusammen.
- Ms-124 87[4] & 88[1] **21** Vergiß nicht: der Satz, der von sich selbst aussagt, er sei unbeweisbar, ist als *mathematische* Aussage aufzufassen – – denn das ist nicht *selbstverständlich*. Es ist nicht selbstverständlich, daß der Satz, die & die Struktur sei so & so nicht konstruierbar, als mathematischer Satz aufzufassen sei.
- Ms-124 88[2] D.h.: wenn man sagt: "er sagt von sich selbst aus" – so ist das auf eine spezielle Weise zu verstehen. Hier nämlich entsteht leicht Verwirrung durch den bunten Gebrauch des Ausdrucks "dieser Satz sagt etwas von ... aus".
- Ms-124 88[3] In diesem Sinne sagt der Satz $625 = 25 \times 25$ auch etwas über sich selbst aus: daß nämlich die linke Ziffer erhalten wird, wenn man die rechts stehenden multipliziert.
- Ms-124 88[4] Der Gödelsche Satz, der etwas über sich selbst aussagt, *erwähnt* sich selbst nicht.
- Ms-124 89[2] 'Der Satz sagt, daß diese Zahl aus diesen Zahlen auf diese Weise nicht erhältlich ist.' – Aber bist Du auch sicher, daß Du ihn recht ins Deutsche übersetzt hast? Ja gewiß, es scheint so. – Aber kann man da nicht fehlgehen?

Ms-124 Könnte man sagen: Gödel sagt, daß man einem math. Beweis
89[4] & auch muß trauen können, wenn man ihn, praktisch, als den
90[1] Beweis der Konstruierbarkeit der Satzfigur nach den
Beweisregeln auffassen will? Oder: Ein math. Satz muß als Satz
einer auf sich selbst wirklich anwendbaren Geometrie aufgefaßt
werden können. Und tut man das so zeigt es sich, daß man sich
auf einen Beweis in gewissen Fällen nicht verlassen kann.

Ms-124 Die Grenzen der Empirie sind nicht unverbürgte Annahmen,
90[3] oder intuitiv als richtig erkannte; sondern Arten & Weisen des
Vergleichs & des Handelns.

Ms-124 **22** 03.07.1941
90[4] &
91[1] &
92[1]

‘Nehmen wir an, wir haben einen arithmetischen Satz, der sagt,
eine bestimmte Zahl ... könne nicht aus den Zahlen ..., ..., ...,
durch die & die Operationen gewonnen werden. Und nehmen
wir an, es ließe sich eine Übersetzungsregel geben, nach
welcher dieser arithm. Satz in die Ziffer jener ersten Zahl – die
Axiome, aus denen wir versuchen ihn zu beweisen, in die
Ziffern jener andern Zahlen – & unsere Schlußregeln in die im
Satz erwähnten Operationen sich übersetzen ließen. – Hätten
wir dann *den arithm Satz* aus den Axiomen nach unsern
Schlußregeln abgeleitet, so hätten wir *dadurch* seine
Ableitbarkeit demonstriert, aber auch einen Satz bewiesen, den
man nach jener Übersetzungsregel dahin aussprechen kann:
dieser arithm. Satz (nämlich unserer) sei unableitbar. Was wäre
nun da zu tun? Ich denke mir, wir schenken unserer
Konstruktion des Satzzeichens glauben, also dem *geometrischen*
Beweis. Wir sagen also, diese ‘Satzfigur’ ist aus jenen so & so

gewinnbar. Und übertragen, nur, in eine andre Notation heißt das: diese Ziffer ist mittels dieser Operationen aus jenen zu gewinnen. Soweit hat der Satz & sein Beweis nichts mit einer besondern *Logik* zu tun. Hier war jener konstruierte Satz einfach eine andere Schreibweise der konstruierten Ziffer; sie hatte die *Form* eines Satzes aber wir verglichen sie nicht mit andern Sätzen als Zeichen, welches dies oder jenes *sagt*, einen *Sinn* hat.

Ms-124
92[2] Aber freilich ist zu sagen daß jenes Zeichen weder als Satzzeichen noch als Zahlzeichen angesehen werden braucht. – Frage Dich: was macht es zu dem einen, was zu dem anderen?

Ms-124
92[3] &
93[1] Lesen wir nun den konstruierten Satz (oder die Ziffer) als Satz der mathematischen Sprache (etwa auf Deutsch), so spricht er das Gegenteil von dem, was wir eben als bewiesen betrachtet. Wir haben also den wörtlichen Sinn des Satzes als falsch demonstriert & ihn zu gleicher Zeit *bewiesen* – wenn wir nämlich seine Konstruktion aus den zugelassenen Axiomen mittels der zugelassenen Schlußregeln als Beweis betrachten.

Ms-124
93[2] Wenn jemand uns einwürfe, wir könnten solche *Annahmen* nicht machen, da es *logische* oder *mathematische* Annahmen wären, so antworten wir, daß nur nötig ist anzunehmen jemand habe einen Rechenfehler gemacht & sei *dadurch* zu dem Resultat gelangt, das wir ‘annehmen’, & er könne diesen Rechenfehler vorderhand nicht finden.

- Ms-124 94[1] Hier kommen wir wieder auf den Ausdruck “der Beweis überzeugt uns” zurück. Und was uns hier an der Überzeugung interessiert, ist weder ihr Ausdruck durch Stimme oder Gebärde, noch das Gefühl der Befriedigung oder ähnliches; sondern ihre Betätigung in der Verwendung des Bewiesenen.
- Ms-124 94[2] Man könnte mit Recht fragen, welche Wichtigkeit Gödel’s Beweis für unsre Arbeit habe. Denn ein Stück Mathematik kann nicht Probleme von der Art der unsern lösen. – Die Antwort ist: daß die *Situation* uns interessiert, in die ein solcher Beweis uns bringt. ‘Was sollen wir nun sagen?’ – das ist unser Thema.
- Ms-124 95[2] So seltsam es klingt, so scheint meine Aufgabe das Gödelsche Theorem betreffend (bloß) darin zu bestehen, klar zu stellen, was in der Mathematik so ein Satz bedeutet, wie: “angenommen, man könnte dies beweisen”.
- Ms-124 95[1] **23** 04.07.1941
Es kommt uns viel zu selbstverständlich vor, daß wir “wieviele?” fragen & darauf zählen & rechnen!
- Ms-124 95[3] Zählen wir, weil es praktisch ist zu zählen? Wir zählen! – Und so rechnen wir auch.
- Ms-124 95[5] Man kann auf Grund eines Experiments – oder wie man es sonst nennen will – manchmal die Maßzahl des Gemessenen, manchmal aber auch das geeignete Maß bestimmen.

Ms-124 96[1] So ist also die Maßeinheit das Resultat von Messungen? Ja & nein. Nicht das Messungsergebnis, aber vielleicht die *Folge* von Messungen.

Ms-124 96[2] Es wäre also *eine* Frage: "hat uns die Erfahrung gelehrt, *so* zu rechnen?" – & eine andere: "ist die Rechnung ein Experiment?".

Ms-124 24 05.03.1944

96[3] & 97[1] Aber lässt sich nicht alles aus allem nach irgend einer Regel – ja nach *jeder* Regel mit entsprechender Deutung – ableiten? Was heißt es, wenn ich z.B. sage: Diese Zahl lässt sich durch Multiplikation jener beiden erhalten? Frage Dich: wann gebraucht man diesen Satz? Nun, es ist z.B. kein psychologischer Satz, der sagen soll, was Menschen unter gewissen Bedingungen tun werden, was sie befriedigen wird; es ist auch kein physikalischer das Benehmen von Zeichen auf dem Papier betreffend. Er wird nämlich in einer andern Umgebung, als ein psychologischer, oder physikalischer, angewandt.

- Ms-124
97[2] Nimm an Menschen lernen rechnen, ungefähr, wie sie es tatsächlich tun; aber stell Dir nun verschiedene 'Umgebungen' vor, die das Rechnen einmal zu einem psychologischen Experiment, einmal zu einem physikalischen mit den Rechenzeichen, einmal zu etwas anderem macht! Wir nehmen an die Kinder lernen zählen & die einfachen Rechnungsarten durch Nachahmen, Aufmunterung & Zurechtweisung. Aber von einem gewissen Punkt wird nun die Nichtübereinstimmung der Rechnenden (also etwa die Rechenfehler) nicht als etwas Schlechtes, sondern als etwas psychologisch Interessantes behandelt. "Also das hieltest Du damals für richtig?" heißt es, "wir Andern haben es alle so gemacht".
- Ms-124
98[1] Ich will sagen: daß das, was wir Mathematik, die *mathematische* Auffassung des Satzes $13 \times 14 = 182$, nennen mit der besondern Stellung zusammenhängt, die wir zu der Tätigkeit des Rechnens einnehmen. Oder, die besondere Stellung, die die Rechnung ... in unserm Leben, in unsern übrigen Tätigkeiten hat. Das Sprachspiel in dem sie steht.
- Ms-124
98[2] Man kann ein Musikstück auswendig lernen, um es richtig spielen zu können; aber auch in einem psychologischen Experiment, um das Arbeiten des musikalischen Gedächtnisses zu untersuchen. Man könnte es aber auch dem Gedächtnis einprägen um danach irgendwelche Veränderungen in der Partitur zu beurteilen.

- Ms-124 98[3] & 99[1] **25** Ein Sprachspiel: Ich rechne Multiplikationen & sage dem Andern: wenn Du richtig rechnest wird das & das herauskommen; worauf er die Rechnung ausführt und sich der Richtigkeit, & manchmal der Falschheit, meiner Voraussage freut. Was setzt dieses Sprachspiel voraus? Daß 'Rechenfehler' leicht zu finden sind & immer Übereinstimmung über Richtigkeit, oder Falschheit der Rechnung rasch erzielt wird.
- Ms-124 99[2] "Wenn Du mit jedem Schritt übereinstimmen wirst, wirst Du zu diesem Resultat gelangen."
- Ms-124 99[3] Was ist das Kriterium dafür, daß ein Schritt der Rechnung richtig ist; ist es nicht, daß mir der Schritt richtig erscheint, & anderes von der gleichen Art? Was ist das Kriterium dafür, daß ich zweimal die gleiche Ziffer hinschreibe? Ist es nicht, daß mir die Ziffern gleich *erscheinen*, & ähnliches?
- Ms-124 99[4] Was ist das Kriterium dafür, daß ich hier dem Paradigma gefolgt bin?
- Ms-124 100[1] "Wenn Du sagen wirst, daß jeder Schritt richtig ist, wirst Du das herausbekommen."
- Ms-124 100[2] Die Voraussage ist eigentlich: Du wirst, wenn Du Dein Tun für richtig hältst, *das* tun. Du wirst, sofern Du jeden Schritt für richtig anerkennst, diesen Weg gehen. – Daher auch zu diesem Ende gelangen.
- Ms-124 100[3] *Logisch* wird geschlossen, wenn keine Erfahrung der Konklusion widerstreiten kann, sie widerstreite denn den Prämissen. D.h., wenn der Schluß nur eine Bewegung in der Darstellung ist.

Ms-124 100[4] & 101[1] **26** In einem Sprachspiel werden Sätze gebraucht; Meldungen, Befehle, u. dergl. Und nun werden auch Rechensätze von den Personen verwendet. Sie sagen sie etwa zu sich selbst, zwischen den Befehlen und Meldungen.

Ms-124 101[2] & 102[1] 06.03.1944
Ein Sprachspiel, in dem Einer nach einer Regel rechnet & nach den Rechnungsergebnissen Steine eines Baues setzt. Er hat gelernt mit Schriftzeichen nach Regeln zu operieren. – Wer den Vorgang dieses Lehrens & Lernens beschreibt hat alles gesagt, was sich über das richtige Handeln nach der Regel sagen läßt. Wir können nicht weiter gehen. Es nützt z.B. nichts zum Begriff der Übereinstimmung zurück zu gehen, weil es nicht sicherer ist, daß eine Handlung mit einer andern übereinstimmt, als daß die Handlung einer Regel gemäß geschehen ist. Es ist ja, nach einer Regel vorgehen, auch auf eine Übereinstimmung gegründet

Ms-124 102[2] Wie gesagt, worin einer Regel (richtig) folgen besteht, kann man nicht *näher* beschreiben, als indem man das *Lernen* des 'Vorgehens nach der Regel' beschreibt. Und diese Beschreibung ist natürlich eine alltägliche, wie die des Kochens, oder Nähens etwa. Sie setzt schon soviel voraus, wie diese. Sie unterscheidet Eins vom Andern; informiert also einen Menschen, der etwas ganz bestimmtes nicht weiß. (Vergl. Bemerkung: die Philosophie verwende keine vorbereitende Sprache etc.)

Ms-124 102[3] & 103[1] 07.03.1944

Denn wer mir beschreibt, wie Leute zum Befolgen einer Regel abgerichtet werden & wie sie richtig drauf reagieren, wird selber in der Beschreibung eine Regel gebrauchen & ihr Verständnis bei mir voraussetzen.

Ms-124
103[2] Wir haben also jemand die Technik des Multiplizierens beigebracht. Dabei verwenden wir Wörter der Aufmunterung & der Zurückweisung. Wir werden ihm auch manchmal das *Ziel* der Multiplikation anschreiben. "Das muß Du erhalten, wenn es richtig sein soll" können wir ihm sagen.

Ms-124
103[3] &
104[1] Kann nun der Schüler aber widersprechen & sagen: 'Woher weißt Du das? Und ist, was Du willst, daß ich der Regel folgen soll, oder daß ich dies Resultat erhalten soll? Denn die beiden brauchen ja nicht zusammen zu treffen.'" Nun, wir nehmen nicht an, daß der Schüler das sagen kann; wir nehmen an daß er die Regel von beiden Seiten her gelten läßt. Daß er den einzelnen Schritt & das Rechnungsbild – & also das Rechnungsergebnis – als Kriterien der Richtigkeit auffaßt, & daß, wenn diese nicht übereinstimmen er an eine Verwirrung der Sinne glaubt.

Ms-124
104[2] **27** Ist es nun denkbar, daß einer der Regel richtig folgt & zu verschiedenen Malen beim Multiplizieren 15×13 doch verschiedenes errechnet? Daß kommt darauf an, *welche Kriterien* er für das richtige Folgen gelten läßt. In der Mathematik ist das Resultat selbst auch ein Kriterium des richtigen Rechnens. So aufgefaßt ist es also undenkbar der Regel richtig zu folgen & verschiedene Rechnungsbilder zu erhalten.

Ms-124 104[3] & 105[1] Das Nicht-Geltenlassen des Widerspruchs charakterisiert die Technik der Verwendung der Wahrheitsfunktionen. Lassen wir den Widerspruch gelten, so heißt das, daß wir die Verwendung der Wahrheitsfunktionen ändern; als faßten wir z.B. eine doppelte Verneinung nicht mehr als Bejahung auf. Und diese Änderung wäre von Bedeutung, da die Technik unserer Logik ihrem Charakter nach zusammenhängt mit – – –

Ms-124 105[2] “Die Regeln zwingen mich zu etwas”, nun das kann man schon sagen, weil, was mir mit der Regel übereinzustimmen scheint ja nicht von meiner Willkür abhängt. Daher kann es ja geschehen daß ich die Regeln eines Brettspiels ersinne & nachträglich herausfinde daß in diesem Spiel wer anfängt gewinnen *muß*. Und so ähnlich ist es ja, wenn ich finde, daß die Regeln zu einem Widerspruch führen.

Ms-124 105[3] 08.03.1944
Ich bin nun gezwungen anzuerkennen, daß das eigentlich kein Spiel ist.

Ms-124 106[1] ‘Die Regeln des Multiplizierens, einmal angenommen, zwingen mich nun anzuerkennen, daß ... \times ... gleich ... ist.’ Angenommen, daß es mir unangenehm wäre, dies anzuerkennen. Soll ich sagen: “Nun, das kommt von dieser Art Abrichtung. Menschen die so abgerichtet, so konditioniert, sind, kommen dann in solche Schwierigkeiten.”?

Ms-124
106[2] &
107[1] 'Wie zählen wir im Dezimalsystem?' – "Wir schreiben auf 1, 2, auf 2, 3 ... – auf 13 14 ... auf 123 124, *u.s.f.*" – Das ist eine Erklärung für den, der zwar irgend etwas nicht wußte, das 'u.s.f.' aber verstand. Und es verstehen, heißt, es nicht als Abkürzung verstehen; es heißt *nicht*, daß er jetzt im Geiste eine viel längere Reihe als die meiner Beispiele sieht. Daß er es versteht, zeigt sich darin, daß er nun gewisse Anwendungen macht, in gewissen Fällen *dies* sagt & *so* handelt.

Ms-124
107[2] "Wie zählen wir im Dezimalsystem?" – ... – Nun, ist das keine Antwort? – Aber nicht für den, der das "u.s.f." nicht versteht. – Aber kann unsere Erklärung es ihm nicht begreiflich gemacht haben? Kann er durch sie nicht die Idee der Regel erhalten haben? – Frage Dich, was die Kriterien dafür sind, daß er diese Idee nun erhalten hat.

Ms-124
107[3] Was zwingt mich denn? – Der Ausdruck der Regel? – Ja; wenn ich einmal so erzogen bin. Aber kann ich sagen, er zwingt mich, ihm zu folgen? Ja; wenn man sich hier die Regel nicht als Linie denkt, der ich nachfahre, sondern als Zauberspruch der uns im Bann hält.

["schlichter Unsinn, & Beulen ..."]

Ms-124
107[4] &
108[1] **28** Warum soll man nicht sagen der Widerspruch, z.B. 'heteronom' \in heteronom $\equiv = \sim$ ('heteronom' \in heteronom), zeige eine logische Eigenschaft des Begriffs 'heteronom'?

Ms-124 “‘Zweisilbig’ ist heteronom“, oder “‘dreisilbig ist nicht
108[2] heteronom“ sind Erfahrungssätze. Es könnte in irgend einem
Zusammenhang wichtig sein, herauszufinden, ob
Eigenschaftswörter die Eigenschaften besitzen, die sie
bezeichnen, oder nicht. Man gebraucht dann in einem
Sprachspiel das Wort “heteronom“. Aber soll nun der Satz “‘h’
∈ h“ ein Erfahrungssatz sein? Er ist es offenbar nicht & wir
würden ihn auch, wenn wir den Widerspruch nicht gefunden
haben, nicht als einen Satz in unserm Sprachspiel zulassen.

Ms-124 09.03.1944
108[3] &
109[1] ‘h’ ∈ h ≡ ~ (‘h’ ∈ h) könnte man ‘eine wahre Kontradiktion’
nennen. – Aber diese Kontradiktion ist doch kein sinnvoller
Satz! Wohl, aber die Tautologien der Logik sind es ja auch
nicht.

Ms-124 ‘Die Kontradiktion ist wahr’ heißt hier: sie ist bewiesen;
109[2] abgeleitet aus den Regeln für das Wort “h“. Ihre Verwendung
ist, zu zeigen, daß “h“ eines jener Wörter ist, welche in “ξ ∈ b“
eingesetzt keinen Satz ergeben.

Ms-124 “Die Kontradiktion ist wahr“ heißt: Das ist wirklich ein
109[3] Widerspruch, & Du darfst also das Wort ‘h’ als Argument von
‘ξ ∈ h’ nicht verwenden.

Ms-124 109[4] & 110[1] **29** Ich bestimme ein Spiel & sage: "Machst Du diese Art Zug, so ziehe ich *so*, machst Du jene, so ziehe ich *so*. – Jetzt spiele!" Und nun macht er einen Zug, oder etwas, was ich auch als Zug anerkennen muß, & wenn ich nach meinen Regeln weiterspielen will, so erweist sich, was immer ich tue, als unrichtig. Wie konnte das geschehen? Als ich Regeln aufstellte, da *sagte* ich etwas. Ich folgte einem gewissen Brauch. Ich sah nicht voraus, was wir weiter tun würden, oder sah nur eine bestimmte Möglichkeit. Es war nicht anders, als hätte ich Einem gesagt: „Mit diesen Figuren kannst Du nicht mattsetzen“ & hätte eine bestehende Möglichkeit des Mattsetzens übersehen.

Ms-124 110[2] & 111[1] Die verschiedenen, halb scherzhaften, Einkleidungen des logischen Paradoxes sind nur in sofern interessant als sie einen daran erinnern, daß eine ernsthafte Einkleidung des Paradoxes von Nöten ist, um seine Funktion eigentlich zu verstehen. Es fragt sich: Welche Rolle kann ein solcher 'logischer Irrtum' in einem Sprachspiel spielen?

Ms-124 111[2] Man gibt jemandem etwa Instruktionen, wie er in dem & dem Fall zu handeln hat; & diese Instruktionen erweisen sich später als *unsinnig*.

- Ms-124 111[3] **30** Das logische Schließen ist ein Teil eines Sprachspiels. Und zwar folgt, der im Sprachspiel logische Schlüsse ausführt, gewissen Instruktionen, die beim Lernen des Sprachspiels selber gegeben wurden. Baut der Gehilfe etwa nach gewissen Befehlen ein Haus, so hat er das Herbeitragen der Baustoffe etc. von Zeit zu Zeit zu unterbrechen & gewisse Operationen mit Zeichen auf einem Papier auszuführen; worauf er, dem Resultat entsprechend, wieder zu seiner Bauarbeit zurückkehrt.
- Ms-124 112[1] Denke Dir einen Vorgang, in welchem jemand, der einen Karren schiebt darauf gekommen ist, daß er die Radachse reinigen muß, wenn der Karren sich zu schwer schieben läßt. Ich meine nicht, daß er zu sich sagt: "immer, wenn der Karren sich nicht schieben läßt, ...". Sondern er *handelt* einfach so. Und nun kommt er darauf einem Andern zuzurufen: "Der Karren geht nicht; reinige die Achse, oder auch: "Der Karren geht nicht. Also muß die Achse gereinigt werden". Nun das ist ein Schluß. Kein logischer, freilich.
- Ms-124 112[2] Kann ich nun sagen: "Der nicht-logische Schluß kann sich als falsch erweisen; der logische nicht"?
- Ms-124 112[3] & 113[1] Ist der logische Schluß richtig, wenn er den Regeln gemäß gezogen wurde; oder, wenn er *richtigen* Regeln gemäß gezogen wird? Wäre es z.B. falsch, wenn man sagte, aus $\sim p$ solle immer p gefolgert werden? Aber warum soll man nicht lieber sagen: so eine Regel gäbe den Zeichen " $\sim p$ " & " p " nicht ihre gewöhnliche Bedeutung?

- Ms-124
113[2] Man kann es so auffassen – will ich sagen – daß die
Schlußregeln den Zeichen ihre Bedeutung geben, weil sie
Regeln der Verwendung dieser Zeichen sind. Daß die
Schlußregeln zur Bestimmung der Bedeutung der Zeichen
gehören. In diesem Sinne können die Schlußregeln nicht falsch,
oder richtig sein.
- Ms-124
113[3] A hat beim Bau die Länge & Breite einer Fläche gemessen &
gibt dem B den Befehl: "Bring 15×18 Platten". B ist dazu
abgerichtet zu multiplizieren & dem Resultat entsprechend
eine Menge von Platten abzuzählen.
- Ms-124
113[4] & Der Satz " $15 \times 18 = 270$ " braucht natürlich nie ausgesprochen
zu werden.
114[1]
Ms-124 10.03.1944
114[2] Man könnte sagen: Experiment – Rechnung sind Pole,
zwischen welchen sich menschliche Handlungen bewegen.

Ms-124 114[3] **31** Wir konditionieren einen Menschen in dieser & dieser Weise; wirken dann auf ihn durch eine Frage ein; & erhalten ein Zahlzeichen. Dieses verwenden wir weiter zu unsern Zwecken & es erweist sich als praktisch. Das ist das Rechnen. – Noch nicht! Dies könnte ein sehr *zweckmäßiger* Vorgang sein – muß aber nicht sein, was wir ‘rechnen’ nennen. Wie man sich denken könnte, daß zu Zwecken denen heute unsere Sprache dient Laute ausgestoßen würden, die doch keine Sprache bildeten. Zum Rechnen gehört, daß alle die richtig rechnen dasselbe Rechnungsbild produzieren. Und ‘richtig rechnen’ heißt nicht: bei klarem Verstande, oder ungestört rechnen, sondern *so* rechnen.

Ms-124 115[2] Jeder math. Beweis stellt das math. Regelgebäude auf einen neuen Fuß.

Ms-124 115[3] **32** Ich habe mich gefragt: Ist Mathematik mit rein phantastischer Anwendung nicht auch wirkliche Mathematik? – Aber es fragt sich: Nennen wir es ‘Mathematik’ nicht etwa nur darum weil es hier Übergänge, Brücken gibt von der phantastischen zur nichtphantastischen Anwendung? D.h.: würden wir sagen, Leute besäßen eine Mathematik, die das Rechnen, Operieren mit Zeichen, *bloß* zu okkulten Zwecken benützten?

Ms-124 115[4] & 116[1] **33** Aber ist es dann doch nicht unrichtig zu sagen: das der Mathematik *Wesentliche* sei, daß sie Begriffe bilde? – Denn die Mathematik ist doch ein anthropologisches Phänomen. Wir können es also als das Wesentliche in einem großen Teil der Mathematik (dessen was ‘Mathematik’ genannt wird) erkennen & doch sagen, es spiele keine Rolle in anderen Gebieten. Diese Einsicht allein wird freilich nicht ohne Einfluß auf die sein, die die Mathematik nun so sehen lernen. Mathematik ist also eine Familie; aber das sagt nicht daß es uns also gleich sein wird, was alles in sie aufgenommen wird.

Ms-124 116[2] Man könnte sagen: verstündest Du *keinen* mathematischen Satz besser als (Du) das Mult. Ax. verstehst, so verstündest Du Mathematik *nicht*.

Ms-124 117[4] & 118[1] **34** – Hier ist ein Widerspruch. Aber wir sehen ihn nicht & ziehen Schlüsse aus ihm. Etwa auf mathematische Sätze; & auf falsche. Aber wir erkennen diese Schlüsse an. – Und bricht nun eine von uns berechnete Brücke zusammen, so finden wir dafür eine andere Ursache, oder sagen, Gott habe es so gewollt. War nun unsre Rechnung falsch; oder war es keine Rechnung? Gewiß, wenn wir als Forschungsreisende nun die Leute betrachten, die es so machen, werden wir vielleicht sagen: diese Leute rechnen überhaupt nicht. Oder: in ihren Rechnungen sei ein Element der Willkür, welches das Wesen ihrer Mathematik von dem der unsern unterscheidet. Und doch würden wir nicht leugnen können daß die Leute eine Mathematik haben.

Ms-124 118[2] & 119[1] Was für Regeln muß der König geben, damit er der unangenehmen Situation von nun an entgeht, in die ihn sein Gefangener gebracht hat? – Was für eine Art Problem ist das? – Es ist doch ähnlich diesem: Wie muß ich die Regeln dieses Spiels abändern, daß die & die Situation nicht eintreten kann. Und das ist eine mathematische Aufgabe.

Ms-124 119[2] Aber kann es denn eine mathematische Aufgabe sein, die Mathematik zur Mathematik zu machen?

Ms-124 119[3] Kann man sagen: “Nachdem dies mathematische Problem gelöst war, begannen die Menschen eigentlich zu rechnen”?

Ms-124 119[4] & 120[1] **35** 11.03.1944
Was ist das für eine Sicherheit, wenn sie darauf beruht, daß unsre Banken tatsächlich im allgemeinen nicht von allen ihren Kunden auf einmal überrannt *werden*; aber bankrott würden, wenn es doch geschähe?! Nun es ist eine *andere* Art von Sicherheit als die primitivere; aber es ist doch eine Sicherheit. Ich meine: wenn nun wirklich in der Arithmetik ein Widerspruch gefunden würde – nun so bewiese das nur, daß eine Arithmetik mit einem *solchen* Widerspruch sehr gute Dienste leisten konnte; & es besser sein wird, wenn wir unsern Begriff der notwendigen Sicherheit modifizieren als zu sagen, das wäre eigentlich noch keine rechte Arithmetik gewesen.

Ms-124 120[2] “Aber es ist doch nicht die ideale Sicherheit?” – Ideal, – für welchen Zweck?

Ms-124 120[3] Die Regeln des logischen Schließens sind Regeln des *Sprachspiels*.

Ms-124 36 12.03.1944

122[1]

Was für eine *Art* von Satz ist: "Die Klasse der Löwen ist kein Löwe, aber die Klasse der Klassen eine Klasse". Wie wird er verifiziert? Wie könnte man ihn *verwenden*? – So viel ich sehe, nur als grammatische Aussage. Jemand drauf aufmerksam zu machen, daß der Ausdruck "die Klasse der Löwen" nicht die Bezeichnung eines Löwen ist, daß aber Klassen eine Klasse bilden können.

Ms-124

122[2]

Man kann sagen, daß Wort "Klasse" werde reflexiv gebraucht, auch wenn man, z.B., die Russellsche Theorie der Typen anerkennt. Denn es wird ja doch auch in ihr reflexiv verwendet.

Ms-124

122[3] &

123[1]

Freilich ist, in diesem Sinn zu sagen, die Klasse der Löwen sei kein Löwe etc., ähnlich, als sagte jemand, er habe ein "e" für ein "n" gehalten, wenn er eine Kugel für einen Kegel ansieht.

Ms-124

123[2]

Das plötzliche Umwechselln der Auffassung des Bildes eines Würfels & die Unmöglichkeit "Löwe" & "Klasse" als vergleichbare Begriffe zu sehen.

Ms-124

123[3]

Der Widerspruch sagt: "Nimm Dich in Acht ...".

Ms-124

123[4]

Wie aber wenn man einem bestimmten Löwen (dem König der Löwen etwa) den Namen "Löwe" gibt? Nun wirst Du sagen: aber es ist doch klar daß im Satz "Löwe ist ein Löwe" das Wort "Löwe" auf zwei verschiedene Arten gebraucht wird. (Log. Phil. Abh.) Aber kann ich sie nicht zu *einer* Art des Gebrauchs zählen?

Ms-124
123[5] &
124[1] Aber wenn in dieser Weise der Satz "Löwe ist ein Löwe" gebraucht würde: würde ich den auf nichts aufmerksam machen, den ich auf die Verschiedenheit der Verwendung der beiden "Löwe" aufmerksam machte?

Ms-124
124[2] Man kann ein Tier daraufhin untersuchen, ob es eine Katze ist. Aber den Begriff Katze kann man so jedenfalls nicht untersuchen.

Ms-124
124[3] Wenn auch "die Klasse der Löwen ist kein Löwe" wie ein Unsinn erscheint, dem man nur aus Höflichkeit einen Sinn beilegen könne; so will ich diesen Satz doch nicht so auffassen, sondern als (einen) rechten Satz, wenn er nur richtig aufgefaßt wird. (Also nicht so wie in Log. Phil. Abh.) Meine Auffassung ist also hier sozusagen anders. Aber das heißt, daß ich sage: es gibt auch ein Sprachspiel mit *diesem* Satz.

Ms-124
124[4] "Die Klasse der Katzen ist keine Katze." – Woher weißt Du das?

Ms-124
124[5] &
125[1] 13.03.1944
In der Tierfabel heißt es: "Der Löwe ging mit dem Fuchs spazieren", nicht *ein* Löwe mit einem Fuchs; noch auch der Löwe so & so mit dem Fuchs so & so. Und hier ist es doch wirklich so, als ob die Gattung Löwe als ein Löwe gesehen würde. (Es ist nicht so, wie Lessing sagt, als ob statt irgendeinem Löwen ein bestimmter gesetzt würde. "Grimmbart der Dachs" heißt nicht: ein Dachs mit Namen "Grimmbart".)

- Ms-124 126[1] Denk Dir eine Sprache, in der die Klasse der Löwen "der Löwe aller Löwen genannt wird", die Klasse der Bäume "der Baum aller Bäume", etc. – weil sie sich vorstellen alle Löwen bildeten *einen* großen Löwen. [Wir sagen: "Gott hat den Menschen geschaffen".] Dann könnte jemand das Paradox aufstellen, es gäbe keine bestimmte Anzahl aller Löwen. Etc.
- Ms-124 126[2] Wäre es aber etwa unmöglich, in so einer Sprache zu zählen & zu rechnen?
- Ms-124 126[3] **37** Man könnte sich fragen: Welche Rolle kann ein Satz, wie "Ich lüge immer", im menschlichen Leben spielen? Und da kann man sich Verschiedenes vorstellen.
- Ms-124 126[4] **38** 14.03.1944
Ist die Umrechnung einer Länge von Zoll auf cm ein logischer Schluß? "Der Würfel ist 2 Zoll lang. – Also ist er ungefähr 50 mm lang." Ist das ein *logischer* Schluß?
- Ms-124 127[1] Ja aber ist nicht eine Regel etwas willkürliches? Etwas, was ich *festsetze*? Und könnte ich festsetzen, daß die Multiplikation 18×15 *nicht* 270 ergeben solle? – Warum nicht? – Aber dann ist sie eben nicht nach der Regel geschehen, die ich zuerst festgesetzt, & deren Gebrauch ich eingeübt hatte. Ist denn etwas, was aus einer Regel folgt, (wieder) eine Regel? Und wenn nicht, – was für eine Art von Satz soll ich es nennen?

Ms-124
127[2] &
128[1] &
129[1]

“Es ist den Menschen ... unmöglich einen Gegenstand als von sich selbst verschieden anzuerkennen.” Ja, wenn ich nur eine Ahnung hätte, wie es gemacht wird, – ich versuchte es gleich! – Aber wenn es uns unmöglich ist einen Gegenstand als von sich selbst verschieden anzuerkennen, so ist es also wohl möglich zwei Gegenstände als von einander verschieden anzuerkennen? Ich habe also etwa zwei Sessel vor mir & erkenne an daß es *zwei* sind. Aber da kann ich doch unter Umständen auch glauben, daß es nur *einer* ist; & in *diesem* Sinne kann ich auch einen für zwei halten. – Aber damit erkenne ich doch nicht den Sessel als von sich selbst verschieden an! Wohl; aber dann habe ich auch nicht die zwei als voneinander verschieden anerkannt. Wer glaubt, er könne dies tun –, & eine Art psychologisches Spiel spielt, der übersetze dies in ein Spiel der Gesten. Wenn er zwei Gegenstände vor sich hat, zeige er mit jeder Hand auf einen von ihnen; gleichsam als wolle er ihnen andeuten, daß sie autonom seien. Hat er nur einen Gegenstand vor sich, so deutet er mit beiden Händen auf ihn um anzudeuten, daß man keinen Unterschied zwischen ihm & ihm selbst machen kann. – Warum soll man nun aber nicht das Spiel in umgekehrter Weise spielen?

Ms-124
129[2] &
130[1]

39 15.03.1944

Die Worte “richtig” & “falsch” werden beim Unterricht im Vorgehen nach der Regel gebraucht. Das Wort “richtig” läßt den Schüler gehen, das Wort “falsch” hält ihn zurück. Könnte man nun dem Schüler diese Worte erklären indem man statt ihrer setzt: “das stimmt mit der Regel überein – das nicht”? Nun, wenn er einen Begriff vom Übereinstimmen hat. Aber

wie, wenn dieser eben erst gebildet werden muß? (Es kommt darauf an, wie er auf das Wort "übereinstimmen" reagiert.)

- Ms-124 130[2] Man lernt nicht einer Regel folgen, indem man zuerst den Gebrauch des Wortes "Übereinstimmung" lernt.
- Ms-124 130[3] Vielmehr lernt man die Bedeutung von "Übereinstimmen", indem man einer Regel folgen lernt.
- Ms-124 130[4] Wer verstehen will, was es heißt: "einer Regel folgen", der muß doch selbst einer Regel folgen können.
- Ms-124 130[5] & 131[1] "Wenn Du diese Regel annimmst, *mußt* Du das tun." – Das kann heißen: die Regel läßt Dir hier nicht zwei Wege offen. (Ein mathematischer Satz.) Ich meine aber: die Regel führt Dich wie ein Gang mit festen Mauern. Aber dagegen kann man doch einwenden, die Regel ließe sich auf alle mögliche Weisen deuten. – Die Regel steht hier wie ein *Befehl*. Und *wirkt* auch wie ein Befehl.
- Ms-124 131[2] & 132[1] **40** Ein Sprachspiel: Etwas *Anderes* bringen; das *Gleiche* bringen. Nun wir können uns vorstellen, wie es gespielt wird. – Aber wie kann ich es Einem erklären? Ich kann ihm *diesen* Unterricht geben. – Aber wie weiß er dann, was er das nächste Mal als 'Gleiches' bringen soll – mit welchem Recht kann *ich* sagen, daß er das richtige, oder falsche, gebracht hat? – Ja, ich weiß freilich, daß (hier) in gewissen Fällen Menschen auf mich einstürmen würden mit den Zeichen der Mißbilligung. Und heißt das nun etwa, die Definition von "Gleich" wäre die: gleich sei, was alle Menschen für gleich hielten? – Freilich nicht.

- Ms-124
132[2] Denn, um Gleichheit zu konstatieren, benütze ich ja natürlich nicht die Übereinstimmung der Menschen. Welches Kriterium verwendest Du also? Gar keins.
- Ms-124
132[3] Das Wort ohne Rechtfertigung zu gebrauchen, heißt nicht, es zu Unrecht gebrauchen.
- Ms-124
133[2] Das Problem des vorigen Sprachspiels [No ...] gibt es natürlich auch in dem: Bringe mir etwas Rotes. Denn woran erkenne ich, daß etwas rot ist? An der Übereinstimmung der Farbe mit einem Muster? – Mit welchem Recht sage ich: “Ja, das ist rot.”? Nun, ich sage es; & es läßt sich nicht rechtfertigen. Und auch für dieses Sprachspiel, wie für das vorige, ist es charakteristisch, daß es sich unter der ruhigen Zustimmung aller Menschen vollzöge.
- Ms-124
135[2] Ein unentschiedener Satz der Mathematik ist etwas, was weder als Regel, noch als das Gegenteil einer Regel anerkannt ist & die Form einer mathematischen Aussage hat. – Ist diese Form aber ein klar umschriebener Begriff?
- Ms-124
135[3] Denke Dir den $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \ell$ als eine Eigenschaft eines Musikstücks (etwa). Aber natürlich nicht so daß das Stück endlos weiterliefe, sondern als eine dem Ohr erkennbare Eigenschaft (gleichsam *algebraische* Eigenschaft) des Stückes.
- Ms-124
137[2] Denk Dir Gleichungen als Ornamente (Tapetenmuster) verwendet; & nun eine Prüfung dieser Ornamente daraufhin, welcher Art Kurven sie entsprechen. Die Prüfung wäre analog der kontrapunktischen Eigenschaften eines Musikstücks.

Ms-124 138[3] & 139[1] **41** Ein Beweis der zeigt, daß die Figur "777" in der Extension von π vorkommt aber nicht zeigt *wo*. Nun, so bewiesen wäre dieser 'Existenzsatz' für gewisse Zwecke *keine Regel*. Aber könnte er nicht z.B. als Mittel der Einteilung von Entwicklungsregeln dienen. Es wäre etwa auf analoge Art bewiesen daß "777" in π^2 nicht vorkomme, wohl aber in $\pi \bullet e$. etc. Die Frage wäre nun: Ist es vernünftig von dem betreffenden Beweis zu sagen: er beweise die Existenz von "777" in dieser Entwicklung. Dies kann einfach irreführend sein. Das ist eben der Fluch der Prosa, & besonders der Russellschen Prosa, in der Mathematik.

Ms-124 139[2] Was schadet es, z.B., zu sagen, Gott kenne *alle* irrationalen Zahlen? Oder: sie seien schon alle da, wenn wir auch nur gewisse kennen? Warum sind diese Bilder nicht harmlos? Einmal verstecken sie gewisse Probleme. –

Ms-124 175[2] Angenommen die Menschen berechnen die Entwicklung von π immer weiter & weiter. Der allwissende Gott weiß also, ob sie bis zur Zeit des Weltuntergangs zu einer Figur 777 gekommen sein werden. Aber kann seine *Allwissenheit* entscheiden, ob die Menschen nach dem Weltuntergang zu jener Figur gekommen *wären*? Sie kann es nicht. Ich will sagen: Auch Gott kann Mathematisches nur durch Mathematik entscheiden. Auch für ihn kann die bloße Regel des Entwickelns nichts entscheiden, was sie für uns nicht entscheidet.

Ms-124 175[3] & 176[1] Man könnte das so sagen: Ist uns die Regel der Entwicklung gegeben, so kann uns nun eine *Rechnung* lehren, daß an der fünften Stelle die Ziffer "2" steht. Hätte Gott dies, ohne diese Rechnung, bloß aus der Entwicklungsregel wissen können? Ich will sagen: Nein.

Ms-124 139[3] **42** Wenn ich von der Mathematik sagte, ihre Sätze bestimmen Begriffe, so ist das *vag*; denn " $2 + 2 = 4$ " bildet einen Begriff in anderem Sinne, als " $p \supset p$ ", " $(x).fx \supset fa$ ", oder der Dedekindsche Satz. Es gibt hier eben eine Familie von Fällen.

Ms-124 139[4] & 140[1] Der Begriff der Regel zur Bildung eines unendlichen Dezimalbruchs ist – natürlich – kein spezifisch mathematischer. Es ist ein Begriff in Zusammenhang mit einer bestimmten *Tätigkeit* im menschlichen Leben. Der Begriff dieser Regel ist nicht mathematischer, als der: der Regel zu folgen. Oder auch: dieser letztere ist nicht weniger scharf definiert, als der Begriff so einer Regel selbst. – Ja, der Ausdruck der Regel & sein Sinn ist nur ein Teil des Sprachspiels: Der Regel folgen.

Ms-124 140[2] Man kann mit dem *gleichen* Recht allgemein von solchen Regeln reden, als von den Tätigkeiten, ihnen zu folgen.

Ms-124 140[3] Man sagt freilich "das liegt alles schon in unserm Begriff" von der Regel, z.B. – aber das heißt nur: zu *diesen* Begriffsbestimmungen neigen wir. Denn was haben wir denn im Kopf, was alle diese Bestimmungen schon enthält?!

Ms-124 Die Zahl ist, wie Frege sagt, eine Eigenschaft eines Begriffs – –
140[4] & aber in der Mathematik ist sie ein Merkmal eines
141[1] mathematischen Begriffs. \aleph_0 ist ein *Merkmal* des Begriffs (der)
Kardinalzahl; & die *Eigenschaft* einer Technik. $2\aleph_0$ ist ein
Merkmal des Begriffs des unendlichen Dezimalbruchs, aber
wovon ist diese Zahl eine Eigenschaft? D.h.: von welcher Art
von Begriff kann man sie empirisch aussagen?

Ms-124 **43** Der Beweis des Satzes zeigt mir, was ich auf die Wahrheit
141[2] des Satzes hin wagen will. Und verschiedene Beweise können
mich wohl dazu bringen dasselbe zu wagen.

Ms-124 Das Überraschende, Paradoxe ist paradox nur in einer
141[3] gewissen, gleichsam mangelhaften, Umgebung. Man muß
diese Umgebung so ergänzen, daß, was paradox schien nicht
länger so erscheint.

Ms-124 Wenn ich bewiesen habe, daß $18 \times 15 = 270$ ist, so habe ich
141[4] & damit auch den geometrischen Satz bewiesen, daß man durch
142[1] Anwendung der Transformationsregeln auf das Zeichen "18 ×
15" das Zeichen "270" erhält. – Angenommen nun, die
Menschen, durch irgendein Gift am klaren Sehen, oder
richtigen Erinnern gehindert (wie wir jetzt sagen wollen)
erhielten bei dieser Rechnung nicht "270". – Ist die Rechnung,
wenn man mit ihr nicht richtig voraussagen kann, was Einer
unter normalen Umständen herausbringen wird, nicht nutzlos?
Nun, auch wenn sie es ist, so zeigt das nicht daß der Satz $18 \times$
 $15 = 270$ der Erfahrungssatz sei: die Menschen rechneten im
allgemeinen so.

Ms-124
142[2] &
143[1] Andererseits ist es nicht klar, daß die allgemeine Übereinstimmung der Rechnenden ein charakteristisches Merkmal alles dessen ist was man "Rechnen" nennt. Ich könnte mir denken, daß Leute die rechnen gelernt haben unter bestimmten Umständen, etwa unter dem Einfluß des Opiums, anfangen Einer verschieden vom Andern zu rechnen, & von diesen Rechnungen Gebrauch machten; & daß man nun nicht sagte, sie rechneten ja gar nicht & seien unzurechnungsfähig, sondern daß man ihre Rechnungen als berechtigtes Vorgehen hinnähme. Aber müssen sie nicht wenigstens zum gleichen Rechnen abgerichtet werden? Gehört *das* nicht zum Begriff des Rechnens? Ich glaube, man könnte sich auch da Abweichungen vorstellen.

Ms-124
144[3] &
145[1] **44** Kann man sagen, daß die Mathematik eine experimentelle Forschungsweise, Fragestellung, lehrt? [\rightarrow] Nun kann man nicht sagen, sie lehre mich z.B. zu fragen, ob ein gewisser Körper sich einer Parabelgleichung gemäß bewegt? – Was tut aber die Mathematik in diesem Fall? Ohne sie oder ohne die Mathematiker wären wir freilich nicht zur Definition dieser Kurve gelangt. War aber, diese Kurve definieren schon Mathematik? Bedingte es z.B. Mathematik, wenn Leute die Bewegung von Körpern darauf hin untersuchten, ob ihre Bahn sich durch eine Ellipsenkonstruktion mit einem Faden & zwei Nägeln darstellen lasse? Wer diese Art der Untersuchung erfunden hätte, hätte der Mathematik getrieben? Er hat doch einen neuen *Begriff* geschaffen. Aber war es auf die Art wie die Mathematik dies tut? War es, wie uns die Multiplikation $18 \times 15 = 270$ einen neuen Begriff gibt?

Ms-124 **45** Kann man also *nicht* sagen, die Mathematik lehrt uns
145[2] zählen? Wenn sie uns aber zählen lehrt, warum nicht auch
Farben miteinander vergleichen?

Ms-124 Es ist klar: wer uns die Ellipsengleichung lehrt, lehrt uns einen
145[3] & neuen Begriff. Wer uns aber beweist, daß *diese* Ellipse & *diese*
146[1] Gerade sich in *diesen* Punkten schneiden; nun der gibt uns auch
einen neuen Begriff.

Ms-124 Uns die Ellipsengleichung lehren ist ähnlich wie, uns zählen
146[2] lehren. Aber auch ähnlich wie, uns die Frage lehren: "sind hier
hundertmal soviel Kugeln als dort?"

Ms-124 Wenn ich nun jemand in einem Sprachspiele diese Frage & eine
146[3] Methode sie zu beantworten gelehrt hätte, hätte ich ihn
Mathematik gelehrt? Oder nur, wenn er mit Zeichen operiert
hat?

Ms-124 (Wäre das etwa als fragte man: "wäre auch das eine Geometrie,
146[4] die *nur* aus den Euklidschen Axiomen bestünde?")

Ms-124 Wenn die Arithmetik uns die Frage "wieviel?" lehrt, warum
147[1] nicht auch die Frage "Wie dunkel?"?

Ms-124 Aber die Frage "sind hier hundertmal soviel Kugeln als dort"
147[2] ist doch keine mathematische Frage & ihre Antwort kein
mathematischer Satz. Eine mathematische Frage wäre: "Sind
170 Kugeln hundertmal soviel als 3 Kugeln?" (Und zwar ist
dies eine Frage der reinen, nicht der angewandten
Mathematik.)

- Ms-124 147[3] Soll ich nun sagen, daß, wer uns Dinge zählen lehrt, & ähnliches, uns neue Begriffe gibt, & *auch* der, welcher uns reine Mathematik mit solchen Begriffen lehrt?
- Ms-124 147[4] Ist eine neue Begriffsverknüpfung ein neuer Begriff? Und schafft die Mathematik Begriffsverknüpfungen?
- Ms-124 147[5] Das Wort "Begriff" ist ganz & gar zu vag.
- Ms-124 148[1] Die Mathematik lehrt uns auf neue Weise mit den Begriffen operieren. Und man kann daher sagen, sie ändert unsere Begriffstätigkeit.
- Ms-124 148[2] Aber erst der bewiesene, oder als Postulat angenommene mathematische Satz tut das, nicht der problematische.
-

Ms-124 148[3] & 149[1] **46** Kann man aber nicht doch mathematisch experimentieren? Z.B. versuchen, ob sich aus einem quadratischen Papier ein Katzenkopf falten läßt, wobei die *physikalischen* Eigenschaften des Papiers, seine Festigkeit, Dehnbarkeit, etc. nicht in Frage gezogen werden? Nun man redet doch hier gewiß von einem Versuchen. Und warum nicht von einem Experimentieren? Dieser Fall ist doch ähnlich dem, Zahlenpaare versuchsweise in die Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ einzusetzen, um eines zu finden das die Gleichung befriedigt. Und kommt man also endlich auf $3^2 + 4^2 = 25$, ist dieser Satz nun das Resultat eines Experiments? Warum nannte man den Vorgang denn ein Versuchen? Hätten wir es auch so genannt, wenn Einer immer aufs erste Mal mit völliger Sicherheit (den Zeichen der Sicherheit) aber ohne Rechnung, solche Probleme löste? Worin bestünde hier das Experimentieren? Angenommen, ehe er die Lösung gibt, erscheint sie ihm als Vision. –

Ms-124 149[2] **47** 18.03.1944
Wenn eine Regel Dich nicht zwingt, so *folgst* Du keiner Regel.

Ms-124 149[3] Aber wie soll ich ihr denn folgen; wenn ich ihr doch folgen kann, wie ich will?

Ms-124 149[4] & 150[1] Wie soll ich dem Wegweiser folgen, wenn alles was ich tue ein Folgen ist?

Ms-124 150[2] Aber daß alles (auch) als ein Folgen *gedeutet* werden kann, heißt doch nicht, daß alles ein Folgen ist.

Ms-124 Aber wie deutet denn also der Lehrer dem Schüler die Regel?
150[3] (Denn der soll ihr doch gewiß eine bestimmte Deutung geben.)
– Nun, wie anders, als durch Worte & Abrichtung? Und der
Schüler hat die Regel (*so* gedeutet) inne, wenn er so & so auf
sie reagiert. *Das* aber ist wichtig, daß diese Reaktion, die uns
das Verständnis verbürgt, bestimmte Umstände, bestimmte
Lebens- & Sprachformen als Umgebung, voraussetzt. (Wie es
keinen Gesichtsausdruck gibt ohne Gesicht.) Dies ist eine
wichtige Gedankenbewegung.)

Ms-124 **48** Zwingt mich eine Linie dazu ihr nachzufahren? – Nein;
151[3] & aber wenn ich mich dazu entschlossen habe sie *so* als Vorlage
152[1] zu gebrauchen, dann zwingt sie mich. – Nein; dann zwingt *ich*
mich sie *so* zu gebrauchen. Ich halte mich gleichsam an ihr fest.
– Aber wichtig ist hier doch, daß ich sozusagen ein für allemal
den Entschluß mit der (allgemeinen) Deutung fassen & halten
kann, & nicht bei jedem Schritt von frischem *deute*.

Ms-124 Die Linie, könnte man sagen, gibt's mir ein, wie ich gehen soll.
152[2] Aber das ist natürlich nur ein Bild. Und gäbe sie mir jedesmal
etwas andres ein, so folgte ich ihr *nicht* als Regel. Und was
"anderes", & was "das Gleiche" heißt, das kann nur das Leben
entscheiden.

Ms-124 "Die Linie gibt mir ein, wie ich gehen soll": das paraphrasiert
152[3] nur, daß sie meine *letzte* Instanz dafür ist, wie ich gehen soll.

Ms-124 152[4] & 153[1] **49** Denke dir Einer folgte einer Linie als Regel auf diese Weise: Er hält einen Zirkel, dessen eine Spitze er der Regel entlang führt, während die andre Spitze *die* Linie zieht, die der Regel folgt. Und wie er so der Regel-Linie entlang geht, öffnet & schließt er den Zirkel, anscheinend mit großer Genauigkeit, wobei er immer auf die Regel schaut, als bestimme *sie* sein Tun. Wir nun, die wir ihm zusehen, sehen keinerlei Regelmäßigkeit in diesem Öffnen & Schließen. Wir können daher seine Art, der Linie zu folgen, von ihm auch nicht lernen. Wir glauben ihm aber, die Linie habe ihm eingegeben, was er tat.

Ms-124 153[2] Wir würden hier (vielleicht) wirklich sagen: "Die Vorlage scheint ihm *einzugeben*, wie er zu gehen hat. Aber sie ist keine Regel."

Ms-124 153[3] **50** Nimm an einer folgt der Reihe $x = 1, 3, 5, 7, \dots$ indem er die Reihe der $x^2 + 1$ hinschreibt; & er fragte sich: "aber tue ich auch immer das Gleiche, oder jedesmal etwas anderes?" Wer von einem Tag auf den andern verspricht: "morgen werde ich das Rauchen aufgeben", sagt der jeden Tag das Gleiche; oder jeden Tag etwas anderes?

Ms-124 153[4] & 154[1] Wie ist das zu entscheiden, ob er immer das gleiche tut, wenn ihm die Linie eingibt, wie er gehen soll?

Ms-124 154[2] **51** Wollte ich nicht sagen: Nur das gesamte Bild der Verwendung des Wortes "gleich" in seiner Verwebung mit den Verwendungen der andern Wörter kann entscheiden, ob er das Wort verwendet wie wir?

- Ms-124 154[3] Tut er nicht immer das Gleiche, nämlich, es sich von der Linie eingeben zu lassen, wie er gehen soll? Wie aber, wenn er sagt, die Linie gebe ihm einmal dies, einmal jenes ein? Könnte er nun nicht sagen: er tue in *einem* Sinne immer das Gleiche, aber einer Regel folge er doch nicht? Und kann aber auch nicht der, der einer Regel folgt, doch sagen, in einem gewissen Sinne tue er jedesmal etwas Anderes? So bestimmt also, ob er das Gleiche tut, oder immer etwas anderes, nicht, ob er einer Regel folgt.
- Ms-124 154[4] & 155[1] Nur *so* kann man den Vorgang, einer Regel folgen, beschreiben, daß man in anderer Weise beschreibt, was wir dabei tun.
- Ms-124 155[2] Hätte es einen Sinn zu sagen: "Wenn er jedesmal etwas *anderes* täte, würden wir nicht sagen: er folge einer Regel"? Das hat *keinen* Sinn.
- Ms-124 155[3] & 156[1] **52** Einer Regel folgen ist ein bestimmtes Sprachspiel. Wie kann man es beschreiben? Wann sagen wir, er habe die Beschreibung verstanden? – Wir tun dies & das; wenn er nun so & so reagiert, hat er das Spiel verstanden. Und dieses 'dies & das' & 'so & so' enthält kein "und so weiter". – Oder: verwendete ich bei der Beschreibung ein "und so weiter" & würde ich gefragt, was das bedeutet, müßte ich es wieder durch eine Aufzählung von Beispielen erklären; oder etwa durch eine Geste. Und ich würde es dann als Zeichen des Verständnisses ansehen, wenn er die Geste etwa mit einem verständnisvollen Gesichtsausdruck wiederholte, & in speziellen Fällen so & so handelte.

- Ms-124 156[2] "Aber reicht denn nicht das Verständnis weiter, als alle Beispiele?" Ein sehr merkwürdiger Ausdruck, & ganz natürlich.
- Ms-124 156[3] Wenn man Beispiele aufzählt & dann sagt "und so weiter", so wird dieser letztere Ausdruck auf andere Weise erklärt, als die Beispiele.
- Ms-124 156[4] Denn das "und so weiter" könnte man einerseits durch einen Pfeil ersetzen der anzeigt, daß das Ende der Beispielreihe nicht ein Ende ihrer Anwendung bedeuten soll. Andererseits heißt "und so weiter" auch: es ist genug, Du hast mich verstanden; wir brauchen keine weiteren Beispiele.
- Ms-124 156[5] & 157[1] Wenn wir den Ausdruck durch eine Geste ersetzen, so könnte es ja sein, daß die Menschen unsre Beispielreihe nur dann verstünden,, wie sie sollten, (nur dann ihr richtig folgten,) wenn wir am Schluß diese Geste machten. Diese wäre also ganz analog der des Zeigens auf einen Gegenstand, oder Ort.
- Ms-124 157[2] **53** Nimm an, eine Linie gebe mir ein, wie ich ihr folgen soll; d.h., wenn ich ihr mit den Augen nachgehe, so sagt mir etwa eine innere Stimme: zieh so. – Nun, was ist der Unterschied zwischen diesem Vorgang, einer Art Inspiration zu folgen & dem, einer Regel zu folgen? Denn sie sind doch nicht das Gleiche. In dem Fall der Inspiration *warte* ich auf die Anweisung. Ich werde einen Andern nicht meine 'Technik' lehren können, der Linie zu folgen. Es sei denn, ich lehre ihn eine Art des Hinhorchens, der Rezeptivität, etc. Aber dann kann ich natürlich nicht erwarten, daß er der Linie so folgt, wie ich.

Ms-124 157[3] & 158[1] Man könnte sich auch so einen Unterricht in einer Art von Rechnen denken. Die Kinder können dann, ein jeder auf seine Weise, rechnen; solange sie nur auf die innere Stimme horchen & ihr folgen. – Dieses Rechnen wäre wie ein Komponieren.

Ms-124 158[2] Denn gehört nicht zum Befolgen einer Regel die *Möglichkeit* einen Andern im Folgen abzurichten? Und zwar durch Beispiele. Und das Kriterium seines Verständnisses muß die Übereinstimmung der einzelnen Handlungen sein. Also nicht wie beim Unterricht in der Rezeptivität.

Ms-124 158[3] **54** Wie folgst Du der Regel? – “Ich mach es so: “ ... & nun folgen allgemeine Erklärungen & Beispiele. – – Wie folgst Du der Stimme der Linie? – “Ich sehe auf sie hin, schließe alle Gedanken aus, etc. etc.”

Ms-124 158[4] “Ich würde nicht sagen, daß sie mir immer etwas anderes eingebe, wenn ich ihr als Regel folgte.’ Kann man das sagen?

Ms-124 159[2] **55** 19.03.1944
Kannst du Dir absolutes Gehör vorstellen, wenn Du es nicht hast? Kannst Du es Dir vorstellen, *wenn* Du es hast? – Kann ein Blinder sich das Sehen von rot vorstellen? Kann *ich* mir es vorstellen? Kann ich mir vorstellen, daß ich so & so spontan reagiere, wenn ich’s nicht tue? Kann ich mir’s besser vorstellen, wenn ich’s tue?

Ms-124 159[3] Kann ich aber das Sprachspiel spielen, wenn ich nicht so reagiere?

Ms-124 **56** 20.03.1944

- 159[4] & 160[1] Man fühlt nicht, daß man immer des Winks (der Eingebung) der Regel gewärtig sein muß. Im Gegenteil. Wir sind nicht gespannt darauf, was sie uns jetzt sagen wird, sondern sie sagt uns immer dasselbe, & wir tun, was sie uns sagt. Man könnte sagen: wir sehen, was wir beim Befolgen der Regel tun, unter dem Gesichtspunkt des *immer Gleichen* an.
- Ms-124 160[2] Man könnte dem, den man abzurichten anfängt, sagen: "Sieh, ich tu immer das Gleiche: ...".
- Ms-124 160[3] **57** Wann sagen wir: "Die Linie gibt mir das *als Regel* ein – immer das Gleiche." Und anderseits: "Sie gibt mir immer wieder ein, was ich zu tun habe – sie ist keine Regel." Im ersten Fall heißt es: ich habe keine weitere Instanz dafür, was ich zu tun habe. Die Regel tut es ganz allein; ich brauche ihr nur zu folgen (& folgen ist eben *eins*). Ich fühle nicht z.B., es ist seltsam, daß mir die Linie immer etwas sagt. – Der andre Satz sagt: Ich weiß nicht, was ich tun werde; die Linie wird's mir sagen.
- Ms-124 160[4] & 161[1] Die Kunstrechner, die zum richtigen Resultat gelangen, aber nicht sagen können, wie. Sollen wir sagen: sie rechnen nicht? (Eine Familie von Fällen.)
- Ms-124 161[2] Diese Dinge sind feiner gesponnen, als grobe Hände ahnen.
- Ms-124 161[3] **58** Kann ich nicht einer Regel zu folgen *glauben*? Gibt es diesen Fall nicht? Und kann ich dann nicht auch *keiner* Regel zu folgen glauben & doch einer folgen? Würden wir nicht auch etwas *so* nennen?

Ms-124 161[4] & 162[1] **59** Wie kann ich das Wort "gleich" erklären? – Nun, durch Beispiele. – Aber ist das *alles*? gibt es nicht eine noch tiefere Erklärung; oder muß nicht doch das *Verständnis* der Erklärung tiefer sein? – Ja, hab ich denn selbst ein tieferes Verständnis? *Habe* ich mehr, als ich in der Erklärung gebe? Woher dann aber das Gefühl, ich hätte mehr, als ich sagen kann? Ist es, daß ich das nicht Begrenzte als Länge deute, die über jede Länge hinausreicht? (Die nicht begrenzte Erlaubnis, als Erlaubnis zu etwas Grenzenlosem.)

Ms-124 162[2] Die Vorstellung die mit dem Grenzenlosen geht, ist die von etwas so großem, daß wir sein Ende nicht sehen können.

Ms-124 162[3] Die Verwendung des Wortes "Regel" ist mit der Verwendung des Wortes "gleich" verwoben.

Ms-124 162[4] Überlege Dir: Unter welchen Umständen wird der Forschungsreisende sagen: Das Wort " ..." dieses Stammes heißt soviel wie unser "und so weiter"? Stelle Dir Einzelheiten ihres Lebens & ihrer Sprache vor, die ihn dazu berechtigen würden.

Ms-124 162[5] "Ich weiß doch, was 'gleich' heißt!" – Daran zweifle ich nicht; ich weiß es auch.

Ms-124 162[6] & 163[1] **60** "Die Linie gibt's mir ein ..." Hier ist der Ton auf dem *Ungreifbaren* dieses Eingehens. Eben darauf, daß *nichts* meine Handlung von der Regel trennt, daß nichts zwischen ihr & der Handlung steht.

- Ms-124 163[3] Man könnte sich aber denken, daß einer mit solchen Gefühlen multipliziert, richtig multipliziert; immer wieder sagt: "Ich weiß nicht – jetzt gibt mir die Regel auf einmal *das* ein!" & daß wir antworten: "Freilich; Du gehst ja ganz nach der Regel vor."
- Ms-124 163[4] & 164[1] Einer Regel folgen: das läßt sich verschiedenem entgegensetzen. Der Forschungsreisende wird, unter anderm, auch die Umstände beschreiben (können), unter denen ein Einzelner dieser Leute nicht von sich selbst sagt, er folge einer Regel. Nämlich auch dann, wenn es in mancher Beziehung so aussieht.
- Ms-124 164[2] Aber könnten wir nicht auch rechnen, wie wir rechnen (Alle übereinstimmend, etc.) & doch bei jedem Schritt das Gefühl haben, von den Regeln wie von einem Zauber geleitet zu werden; erstaunt darüber vielleicht, daß wir übereinstimmen? (Der Gottheit etwa für diese Übereinstimmung dankend.)
- Ms-124 164[3] Daraus siehst Du nur, wieviel zu der Physiognomie dessen gehört, was wir im alltäglichen Leben "einer Regel folgen" nennen!
- Ms-124 164[4] Man folgt der Regel '*mechanisch*'. Man vergleicht sich also mit einem Mechanismus.
- Ms-124 164[5] "Mechanisch", das heißt: ohne zu denken. Aber *ganz* ohne zu denken? Ohne *nachzudenken*.
- Ms-124 165[1] Der Forscher könnte sagen: "Sie folgen Regeln, aber es sieht doch ganz anders aus, als bei uns."

Ms-124 "Sie gibt mir, verantwortungslos, dies, oder das ein" heißt: ich
165[2] kann es Dich nicht lehren, *wie* ich der Linie folge. Ich setze
nicht voraus, daß Du ihr folgen wirst wie ich, auch wenn Du
ihr folgst.

Ms-124 **61** 21.03.1944

165[3]

Eine Addition von Formen, in der gewisse Glieder
verschmelzen spielt in unserm Leben eine sehr geringe Rolle. –
Wie wenn

&

die Figur

ergeben. Aber wäre dies eine *wichtige* Operation, so hätten wir
vielleicht einen andern geläufigen Begriff von der
arithmetischen Addition.

Ms-124 Daß man ein Boot, einen Hut, etc. aus einem quadratischen
165[4] & Stück Papier (nach gewissen Regeln) falten kann, ist uns
166[1] natürlich als geometrische Tatsache zu betrachten, nicht der
Physik. Aber ist Geometrie, so verstanden, nicht ein Teil der
Physik? Nein; wir spalten die Geometrie von der Physik ab. Die
geometrische Möglichkeit von der physikalischen. Aber wie,
wenn man sie beisammen ließe? Wenn man einfach sagte:
"wenn Du das & das & das mit dem Stück Papier tust, wird *dies*
herauskommen"? Was zu tun ist, könnte durch einen Reim
gegeben werden. Ist es denn nicht möglich, daß jemand
zwischen den beiden Möglichkeiten gar nicht unterscheidet?
Wie etwa ein Kind, das diese Technik lernt. Es weiß nicht, &
denkt nicht darüber nach, ob diese Resultate des Faltens nur
möglich sind weil das Papier sich dabei in der & der Weise
dehnt, verzerrt, oder, weil es sich *nicht* verzerrt.

Ms-124 166[2] & 167[1] Und ist es nun nicht auch so in der Arithmetik? Warum sollten Leute nicht rechnen lernen können ohne einen Begriff von einer mathematischen & einer physikalischen Tatsache. Sie wissen nur, daß das immer herauskommt, wenn sie gut achtgeben & tun was man sie gelehrt hat. Denken wir uns, während wir rechneten veränderten sich die Ziffern sprungweise auf dem Papier. Eine Eins würde plötzlich zu einer 6 dann zu einer 5, dann wieder zu einer 1 u.s.f. Und ich will einmal annehmen, das änderte an der Rechnung gar nichts, weil, sowie ich eine Ziffer ablese um mit ihr zu rechnen, oder sie anzuwenden, sie wieder zu der würde, die wir bei *unserm* Rechnen vor uns haben. Dabei sähe man aber wohl während des Rechnens wie die Ziffern sich ändern; wir sind aber instruiert uns darum weiter nicht zu kümmern. Dieses Rechnen könnte natürlich, auch wenn wir die obige Annahme nicht machen, zu brauchbaren Resultaten führen. Wir rechnen hier streng nach Regeln, & doch *muß* dies Resultat nicht herauskommen. – Ich nehme an, daß wir keinerlei Gesetzmäßigkeit in dem Wechsel der Ziffern sehen.

Ms-124 167[2] & 168[1] Ich will sagen: Man könnte dieses Rechnen wirklich als ein Experimentieren auffassen, & z.B. sagen: “versuchen wir was jetzt herauskommt, wenn ich diese Regel anwende”.

Ms-124 168[2] Oder auch: “Machen wir dieses Experiment: schreiben wir die Ziffern mit einer Tinte von dieser Zusammensetzung ... & rechnen nach der Regel

Ms-124 168[3] Nun könntest Du natürlich sagen: “Dieses Manipulieren von Ziffern nach Regeln ist (nun) kein Rechnen.

- Ms-124 “Wir rechnen nur, wenn hinter dem Resultat ein Muß steht.” –
168[4] Aber wenn wir nun nur dieses Muß nicht wissen, – liegt es da
dennoch in der Rechnung? Oder rechnen wir nicht, wenn wir
es sozusagen ganz naiv tun?
- Ms-124 Wie ist es *damit*: Der rechnet nicht, der, wenn ihm einmal das,
168[5] & einmal jenes herauskommt & er einen Fehler nicht finden kann,
169[1] sich damit abfindet & sagt: es zeige sich eben, daß gewisse
noch unbekannte Umstände das Ergebnis beeinflussen.
- Ms-124 Man könnte das so ausdrücken: Wer die Rechnung zum Finden
169[2] eines kausalen Zusammenhangs verwendet, rechnet nicht.
- Ms-124 Die Kinder werden nicht nur im Rechnen geübt, sondern auch
169[3] in einer ganz bestimmten Stellungnahme gegen einen
Rechenfehler.
- Ms-124 Was ich sage, kommt darauf hinaus, die Mathematik sei
169[4] *normativ*. Aber “Norm” bedeutet nicht dasselbe, wie “Ideal”.
- Ms-124 **62** 22.03.1944
171[2] Die Einführung einer neuen Schlußregel kann man als
Übergang zu einem neuen Sprachspiel auffassen. Ich stelle mir
eines vor, in welchem etwa eine Person ‘ $p \supset q$ ’ aussagt, eine
andere ‘ p ’, & eine dritte den Schluß zieht.

Ms-124 171[3] **63** Ist es möglich, zu beobachten, daß eine Fläche rot & blau gefärbt ist; & nicht zu beobachten, daß sie rot ist? Denk Dir, man verwende eine Art Farbadjektiv für Dinge, die halb rot halb blau sind: Man sagt sie seien 'bu'. Könnte nun jemand nicht darauf trainiert sein, zu beobachten, ob etwas bu ist; & nicht darauf, ob es auch rot ist? Dieser würde dann nur zu melden wissen: "bu", oder "nicht bu". Und wir würden aus der ersten Meldung den Schluß ziehen, die Fläche enthalte rot.

Ms-124 172[1] 23.03.1944
Ich stelle mir vor, daß die Beobachtung durch ein psychologisches Sieb geschieht, das z.B. nur das Faktum durchläßt, die Fläche sei blau-weiß-rot (französische Trikolore), oder sei es nicht.

Ms-124 172[2] Ist es nun eine besondere Beobachtung, die Fläche sei zum Teil rot, wie kann dies logisch aus dem Vorigen folgen. Die Logik kann uns doch nicht sagen, was wir beobachten müssen.

Ms-124 172[3] Jemand zählt Äpfel in einer Kiste; er zählt bis 100. Ein Anderer sagt: "also sind jedenfalls 50 Äpfel in der Kiste" (das ist alles, was ihn interessiert). Das ist doch ein logischer Schluß; ist es aber nicht auch eine besondere Erfahrung?

Ms-124 172[4] & 173[1] **64** Eine Fläche, in eine Anzahl von Streifen geteilt, wird von mehreren Leuten beobachtet. Die Farben der Streifen ändern sich, alle

zu gleicher Zeit, immer nach je einer Minute. *Jetzt* sind die Farben: rot, grün, blau, schwarz, schwarz, blau. Es wird

beobachtet: rot • blau \supset schwarz \therefore weiß Es wird auch beobachtet: \sim grün \supset \sim weiß und Einer zieht den Schluß: \sim grün \supset rot • blau • \sim schwarz Und diese Implikationen sind 'material implications' in Russells Sinn.

Ms-124
173[2] &
174[1] Aber kann man denn, daß
 $r \cdot b \supset s \therefore w,$

beobachten? Beobachtet man nicht *Farben-Zusammenstellungen*, also etwa, daß $r \cdot b \cdot s \cdot w$; & leitet dann jenen Satz ab? Aber kann Einer bei der Beobachtung einer Fläche nicht ganz von der Frage eingenommen sein, ob sie sich grün, oder nicht grün färben wird; & wenn er nun sieht: $\sim g$, muß er auf die besondere Farbe der Fläche aufmerksam sein? Und könnte einer nicht ganz von dem Aspekt $r \cdot b \supset s \therefore w$ eingenommen sein? Wenn er z.B. dazu angelernt worden wäre, alles andere vergessend, nur unter diesem Gesichtspunkt die Fläche zu betrachten. (Es könnte den Menschen unter bestimmten Verhältnissen gleichgültig sein, ob Gegenstände rot, oder grün sind; von Wichtigkeit aber, ob sie eine dieser Farben, oder eine dritte besitzen. Und es könnte in diesem Falle ein Farbwort für "rot oder grün" geben.)

Ms-124
174[2] Wenn man aber beobachten kann, daß
 $r \cdot b \supset s \therefore w$

&

$\sim g \supset \sim w,$

dann kann man ja auch beobachten, & nicht bloß schließen, daß

$\sim g \supset r \bullet b \bullet \sim s$.

Ms-124 175[1] Wenn dies drei Beobachtungen sind, dann muß es auch möglich sein, daß, die dritte Beobachtung, nicht mit dem logischen Schluß aus den beiden ersten übereinstimmt.

Ms-124 176[2] 24.03.1944
[→ ←] Ist es denn also denkbar, daß einer beim Beobachten einer Fläche die Verbindung Rot-&-Schwarz sieht (etwa als Flagge), aber, wenn er sich (nun) drauf einstellt, *eine* der beiden Hälften zu sehen, statt des Rot ein Blau sieht? Nun, Du hast es gerade beschrieben. – Es wäre etwa so, wie wenn jemand auf eine Gruppe von Äpfeln schaute & sie ihm immer als zwei Gruppen von je zwei Äpfeln erschienen, so wie er aber versuchte, sie mit dem Blick zusammenzufassen, erschienen sie ihm als 5. Dies wäre ein sehr merkwürdiges Phänomen. Und es ist keines, von deren Möglichkeit wir Notiz nehmen.

Ms-124 176[3] & 177[1] 25.03.1944
Erinnere Dich dran, daß ein Rhombus, als Raute angesehen, nicht wie ein Parallelogramm aussieht. Nicht aber, als schienen seine gegenüberliegenden Seiten nicht parallel zu sein, sondern der Parallelismus fällt uns nicht auf.

- Ms-124 177[2] **65** Ich könnte mir denken, daß Einer sagt, er sähe einen weiß & gelben Stern aber nichts Gelbes – weil er den Stern gleichsam als eine *Verbindung* von Farbteilen sieht, die er nicht zu trennen vermag.
- Ms-124 177[3] Er hatte z.B. Figuren vor sich, wie diese
 Gefragt, ob er ein rotes Fünfeck sieht & würde er 'ja' sagen; gefragt ob er ein gelbes sieht: 'nein'. Ebenso sagt er er sehe ein blaues Dreieck, aber kein rotes. – Aufmerksam gemacht sagte er etwa: "Ja, jetzt seh ich's; ich hatte die Sterne nicht so aufgefaßt." Und so könnte es ihm auch vorkommen, man könne die Farben im Stern nicht trennen, weil man die Formen nicht trennen kann.
- Ms-124 177[4] & 178[1] Der kann die Geographie einer Landschaft nicht übersehen lernen, der so langsam in ihr sich fortbewegt, daß er das eine Stück vergessen hat, wenn er zu einem andern kommt.
- Ms-124 178[3] & 179[1] **66** 29.03.1944
 Warum rede ich immer vom Zwang durch die Regel; warum nicht davon, daß ich ihr folgen *wollen* kann? Denn das ist ja ebenso wichtig. Aber ich will auch nicht sagen, die Regel zwingt mich so & so zu handeln, sondern sie mache es mir möglich, mich an ihr anzuhalten & von ihr zwingen zu lassen.
- Ms-124 179[2] Und wer, z.B., ein Spiel spielt, der hält sich an seine Regeln. Und es ist eine interessante Tatsache, daß Menschen zum Vergnügen Regeln aufstellen & sich dann nach ihnen halten.

- Ms-124 179[3] & 180[1] Meine Frage war eigentlich: "wie kann man sich an eine Regel halten?" Und das Bild, das einem hier vorschweben könnte, wäre das eines kurzen Stücks Geländer, durch das ich mich weiter soll führen lassen, als das Geländer reicht. [Aber da *ist* doch nichts; aber da ist doch nicht *nichts!*] Denn wenn ich Frage "wie *kann* man sich ...", so heißt es, daß mir hier etwas *paradox* erscheint; also ein Bild mich verwirrt.
- Ms-124 180[2] "Daß das auch rot ist, daran habe ich gar nicht gedacht; ich habe es nur als Teil des mehrfarbigen Ornaments gesehen."
- Ms-124 180[3] Logischer Schluß ist ein Übergang der gerechtfertigt ist, wenn er einem bestimmten Paradigma folgt & dessen Rechtmäßigkeit von sonst nichts abhängt.
- Ms-124 180[4] **67** Wir sagen: "Wenn ihr beim Multiplizieren wirklich der Regel folgt, *muß* das Gleiche herauskommen." Nun, wenn dies nur die etwas hysterische Ausdrucksweise der Universitätssprache ist, so braucht sie uns nicht sehr zu interessieren. Es ist aber der Ausdruck einer Einstellung zu der Technik des Rechnens, die sich überall in unserm Leben zeigt. Die Emphase des *Muß* entspricht nur der Unerbittlichkeit dieser Einstellung sowohl zur Technik des Rechnens, als auch zu unzähligen verwandten Techniken.
- Ms-124 181[1] Das mathematische *Muß* ist nur ein anderer Ausdruck dafür, daß die Mathematik Begriffe bildet. Und Begriffe dienen zum Begreifen. Sie entsprechen einer bestimmten Behandlung der Sachlagen.
- Ms-124 Die Mathematik bildet ein Netz von Normen.

181[2] **68** Es ist möglich, den Komplex aus A & B sehen, ohne A,
Ms-124 oder B, zu sehen. Es ist auch möglich, den Komplex einen
181[5] & "Komplex von A & B" zu nennen & zu denken, diese
182[1] Benennung deutete nur auf eine Art Verwandtschaft dieses
Ganzen mit A & mit B hin. Es ist also möglich, zu sagen, man
sehe den Komplex von A & B, aber weder A noch B. Etwa wie
man sagen könnte, es sei hier ein rötlich-gelb, aber weder rot
noch gelb.

Ms-124 Kann ich nun A & B vor mir haben & auch beide sehen, aber
182[2] nur $A \vee B$ beobachten? Nun, in gewissem Sinne ist das doch
möglich. Und zwar dachte ich mir es so, daß der Beobachter
von einem gewissen Aspekt eingenommen sei; daß er etwa eine
bestimmte Art von Paradigma vor sich habe, in einer
bestimmten Routine der Anwendung begriffen sei. – Und wie
er nun auf $A \vee B$ eingestellt sein kann, so (doch) auch auf $A \bullet B$.
Es fällt ihm also nur $A \bullet B$ auf & nicht, z.B., A. Auf $A \vee B$
eingestellt sein heiße, könnte man sagen, mit dem Begriff ' $A \vee B$ '
auf die & die Situation zu reagieren. Und genauso kann man's
natürlich auch mit $A \bullet B$ tun.

Ms-124 Sagen wir: es interessiert Einen nur $A \bullet B$, & er urteilt also, was
182[3] & immer geschieht, nur " $A \bullet B$ ", oder " $\sim (A \bullet B)$ "; so kann ich
183[1] mir denken, daß er " $A \bullet B$ " urteilt & auf die Frage "siehst Du
B?" sagt "nein, ich sehe $A \bullet B$ ". Etwa wie mancher der $A \bullet B$
sieht nicht zugeben wird, er sehe $A \vee B$.

Ms-124 **69** 30.03.1944
183[2]

Aber die Fläche 'ganz rot sehen' & 'ganz blau sehen' sind doch gewiß 'echte' Erfahrungen, & doch sagen wir, Einer könne sie nicht zugleich haben.

Ms-124
183[3] Wenn er uns nun versicherte, er sehe diese Fläche ganz rot & zugleich ganz blau? Wir müßten sagen: "Du machst Dich uns nicht verständlich".

Ms-124
183[4] Der Satz 1 Fuß = ... cm ist bei uns zeitlos. Man könnte sich aber auch den Fall denken, in welchem sich das Fußmaß & das Metermaß nach & nach etwas veränderten & dann immer wieder verglichen werden müßten um in einander umgerechnet zu werden.

Ms-124
183[5] Ist aber nicht auch bei uns das Verhältnis der Längen des Meters & Fußes experimentell bestimmt worden? Doch; aber das Ergebnis wurde zu einer Regel gestempelt.

Ms-124
189[2] **70** Inwiefern kann man sagen, ein Satz der Arithmetik gebe uns einen Begriff? Nun, denken wir uns ihn nicht als Satz, als Entscheidung einer Frage, sondern als eine, irgendwie anerkannte, Verbindung von Begriffen.

Ms-124
191[3] Das gleichgesetzte 25^2 & 625 gibt mir nun, könnte man sagen, einen neuen Begriff. Und der Beweis zeigt, was es mit dieser Gleichheit für eine Bewandtnis hat. – "Einen neuen Begriff geben" kann nur heißen, eine neue Begriffsverwendung einführen, eine neue Praxis.

Ms-124
192[1] "Wie kann man den Satz von seinem Beweis loslösen?" Dieser Satz zeigt natürlich eine falsche Auffassung.

- Ms-124 192[2] Der Beweis ist eine *Umgebung* des Satzes.
 Ms-124 192[3] ‘Begriff’ ist ein vager Begriff.
 Ms-124 192[4] **71** Nicht in jedem Sprachspiel gibt es etwas, was man
 Ms-124 192[5] “Begriffe” nennen wird.
 Ms-124 192[5] Begriff ist etwas wie ein Bild, womit man Gegenstände
 vergleicht.
- Ms-124 192[6] & 193[1] Gibt es im Sprachspiel (2) Begriffe? Aber man könnte es leicht
 so erweitern, daß “Platte”, “Würfel”, etc. zu Begriffswörtern
 würden. Z.B. durch eine Technik des Beschreibens oder
 Abbildens jener Gegenstände. Es ist natürlich keine scharfe
 Grenze zwischen Sprachspielen, die mit Begriffen arbeiten, &
 andern. Wichtig ist, daß das Wort “Begriff” sich auf eine Art
 von Behelf im Mechanismus der Sprachspiele bezieht.
- Ms-124 193[2] & 194[1] **72** Betrachte einen Mechanismus. Etwa den:
 Während der Punkt A einen Kreis beschreibt, beschreibt B eine
 Acht. Wir schreiben das nun als einen kinematischen Satz.
 Indem ich den Mechanismus umtreibe, beweist mir seine
 Bewegung den Satz; wie eine Konstruktion auf dem Papier es
 täte. Der Satz entspricht etwa einem Bild des Mechanismus mit
 den eingezeichneten Bahnen der Punkte A & B. Er ist also in
 gewisser Beziehung ein Bild jener Bewegung. Er hält das fest,
 wovon mich der *Beweis* überzeugt. Oder – wozu er mich
 überredet.
- Ms-124 194[3] Wenn der Beweis das Vorgehn nach der Regel registriert, so
 erzeugt er (dadurch) einen neuen Begriff.

Ms-124 194[4] & 195[1] Indem er einen neuen Begriff erzeugt, überzeugt er mich von etwas. Denn zu dieser Überzeugung ist es wesentlich, daß das Vorgehn nach diesen Regeln immer das gleiche Bild erzeugen muß. ('Gleich' nämlich nach unsern gewöhnlichen Regeln des Vergleichens & Kopierens.)

Ms-124 195[2] Damit hängt es zusammen, daß man sagen kann, der Beweis müsse das Bestehen einer internen Relation zeigen. Denn die interne Relation ist die Operation, die eine Struktur aus der andern erzeugt als äquivalent angesehen mit dem Bild dieses Übergangs selbst – so daß nun der Übergang dieser Bilderreihe gemäß eo ipso ein Übergang jenen Regeln gemäß ist.

Ms-124 195[3] Indem der Beweis einen Begriff erzeugt, überzeugt er mich von etwas. Wovon er mich überzeugt, ist in dem Satz ausgesprochen, den er bewiesen hat.

Ms-124 195[4] & 196[1] Problem: Bedeutet das Wort "mathematisch" jedesmal das Gleiche: wenn wir von 'mathematischen' Begriffen, von 'mathematischen' Sätzen & von 'mathematischen' Beweisen reden? |

Ms-124 196[2] 19.04.1944
Was hat nun der bewiesene Satz mit dem Begriff zu tun den der Beweis schuf? Oder, was hat der bewiesene Satz mit der internen Relation zu tun, die der Beweis demonstrierte?

Ms-124 196[3] Das Beweisbild ist ein Instrument des Überzeugens.

- Ms-124 196[4] Es ist klar, man kann auch den unbewiesenen math. Satz anwenden; ja auch den falschen. Der math. Satz sagt mir dann: Verfahre so!
- Ms-124 196[5] **73** "Wenn uns der Beweis überzeugt, dann müssen wir auch von den Axiomen überzeugt sein". Nicht als von empirischen Sätzen; das ist ihre Rolle nicht. Sie sind im Sprachspiel von der Verifikation durch die Erfahrung ausgeschlossen. Sind nicht Erfahrungssätze sondern Prinzipien des Urteilens.
- Ms-124 197[2] Ein Sprachspiel: Wie habe ich mir eins vorzustellen, in dem Axiome, Beweise & bewiesene Sätze auftreten?
- Ms-124 197[3] & 198[1] Wer in der Schule zum erstenmal ein bißchen von der Logik hört, der ist sogleich davon überzeugt, wenn man ihm sagt, ein Satz implizierte sich selbst, oder wenn er nun den Satz vom Widerspruch lernt, oder des ausgeschlossenen Dritten. – Warum ist er gleich davon überzeugt? Nun, diese Gesetze passen ganz in den Gebrauch der Sprache, der ihm so geläufig ist. Dann lernt er etwa kompliziertere Sätze der Logik beweisen. Die Beweise werden ihm vorgeführt, & er ist wieder überzeugt; oder er erfindet einen Beweis selber. Er lernt so neue Techniken des Schließens. Und auch, auf welche Rechnung es zu setzen ist, wenn (nun) Fehler sich zeigen.
- Ms-124 198[2] Der Beweis überzeugt ihn, daß er an dem Satz, an der Technik, die er vorschreibt, festhalten muß; aber er zeigt ihm zugleich, wie er an dem Satz festhalten kann, ohne Gefahr zu laufen mit einer Erfahrung in Konflikt zu geraten.

- Ms-124 198[4] **74** Jeder Beweis in der angewandten Mathematik kann aufgefaßt werden als ein Beweis der reinen Mathematik, welcher beweist daß *dieser* Satz aus *diesen* Sätzen folgt, oder aus ihnen durch die & die Operationen zu erhalten ist; etc.
- Ms-124 198[5] Der Beweis ist ein bestimmter *Gang*. Wenn wir ihn beschreiben, so werden Ursachen nicht genannt.
- Ms-124 199[1] Ich handle auf den Beweis hin. – Aber wie? – Dem Satz gemäß der bewiesen wurde.
- Ms-124 199[2] Der Beweis hat mich etwa eine Technik des Approximierens gelehrt. Aber er hat doch *etwas* bewiesen, mich von etwas überzeugt. *Das* spricht der Satz aus. *Er* sagt, was ich nun auf den Beweis hin tun werde.
- Ms-124 199[3] Der Beweis gehört zum Hintergrund des Satzes. Zum System, in dem der Satz wirkt.
- Ms-124 199[4] Sieh', *so* geben 3 und 2 5. Merk Dir diesen Vorgang!
- Ms-124 199[5] & 200[1] Jeder Erfahrungssatz kann als Regel dienen wenn man ihn – wie einen Maschinenteil – feststellt, unbeweglich macht, so daß sich nun alle Darstellung um ihn dreht & er zu einem Teil des Koordinatensystems wird & unabhängig von den Tatsachen.
- Ms-124 200[2] "So ist es, wenn dieser Satz aus diesen abgeleitet wird. Das mußst Du doch zugeben." – Was ich zugebe ist, daß ich so einen Vorgang *so* nenne.
-